This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

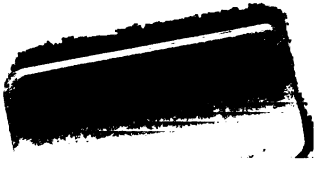
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

$B 76 459

YC 66857



Sammlung von Festigkeitsaufgaben

aus dem

MASCHINENBAU,

mit

Resultaten und kurzer Angabe der Auflösungen.

Zugleich Beispielsammlung aus der angewandten Mathematik.

Ein Uebungsbuch

zum Selbstunterrichte für Studierende des Maschinen- und Hochbaues,

sowie auch für praktisch thätige Techniker.

Verfasst von

Carl S. Graf,

Ingenieur und Lehrer an der k. k. Maschinenbaufachschule

mit Lehrwerkstätten in Komotau, beeideter gerichtlicher Sachverständiger.

Mit 97 Abbildungen.

WIEN 1895.

Verlag von Moritz Perles

I., Seilergasse 4 (Graben).

TJ 175
G7

62937

Alle Rechte vorbehalten.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

VORWORT.

Die vorliegende Aufgaben-Sammlung ist ein Auszug aus dem vom Verfasser im November 1884 herausgegebenen, größeren, denselben Stoff behandelnden Werke „Anwendungen der Festigkeitslehre auf den Maschinbau" u. s. w. (482 Druckseiten, Spielhagen & Schurich, Wien) und ist für diejenigen Leser bestimmt, welche entweder nur die Resultate der Aufgaben ohne Beigabe der vollständigen, wissenschaftlich begründeten Auflösungen zu wissen wünschen, oder welche im Stande sind, die im Auszuge nur kurz angegebenen Auflösungen, respective nur angedeuteten mathematischen Entwickelungen selbst vollständig dazu zu machen. Kurzgefasster Text (bei gleicher Klarheit der Darstellung und nahezu gleicher Reichhaltigkeit des Inhaltes, wie bei dem oben angegebenen Werke des Verfassers), möglichste Beschränkung im Gebrauch der mathematischen Hilfsmittel, Vermeidung jeder höheren, mathematischen Disciplin, daher geringes Volumen, billiger Preis, Verbesserung in der Anordnung des Stoffes und sonstige Verbesserungen sind Vorzüge dieses Büchleins gegenüber dem oben erwähnten, größeren Werke des Verfassers; außerdem bietet aber dieser Auszug — ganz abgesehen von seiner fachlichen Seite — für die Herren Professoren und Schüler an Mittel- und Staatsgewerbeschulen eine reiche Fülle von Anregungen für Aufgaben aus einem speciellen Gebiete der angewandten Mathematik, und kann daher beim Unterrichte in dieser Disciplin, besonders aber für häusliche Übungen der Studierenden, mit vielem Nutzen verwendet werden.

Komotau, im März 1895.

Der Verfasser.

INHALTS-VERZEICHNIS.

Seite

Vorbemerkung 1

I. Capitel.

Aufgaben aus der Lehre von der Zug-, Druck- und Scherfestigkeit.

Nr. der Aufgabe

1—10 Diverse einfache Beispiele über Berechnungen von Tragkräften, Querschnittsdimensionen und Längenveränderungen prismatischer Körper . 1

11—23 Berechnung von Ketten, Hanf- und Drahtseilen, ohne und mit Berücksichtigung des Eigengewichtes. Bestimmung der Verhältnisse zwischen den Querschnittsdimensionen, Gewichten und Tragkräften der genannten Zugorgane, mit Hinweisung auf den Kostenpunkt 3

24—38 Querschnittsbestimmung diverser, im Maschinenbau vorkommender prismatischer Körper (Maschinentheile) 8

39—51 Berechnung von Schrauben und Schraubenverbindungen 14

52—57 Berechnungen von Nieten und Nietenverbindungen 25

II. Capitel.

Aufgaben aus der Lehre von der Biegungsfestigkeit.

1— 3 Einfache Fälle über Berechnungen von Tragkräften und Querschnitts-Dimensionen prismatischer Körper 32

4— 7 Berechnungen von Zapfen aller Art 33

8—14 Berechnungen von Durchmessern und Tragkräften von Wellen, die nur auf Biegung beansprucht werden, für verschiedene Belastungsarten, Querschnitte und Materialien, nach 2 verschiedenen Methoden . 37

15—26 Berechnung der Tragachsen von der Form der gleichen Festigkeit, für verschiedene Belastungsarten, Querschnitte und Materialien 42

27—56 Aufgaben über Berechnungen von verschiedenen Einfach-, Doppel-T- und zusammengesetzten Trägern für verschiedene Belastungs- und Befestigungsarten, unter Berücksichtigung der Querschnittsformen gleicher Festigkeit, der Wendepunkte der elastischen Linie, der günstigsten Lage der Unterstützungspunkte und der Maximaltragkräfte. Tragkraft- und Querschnittsberechnungen verschiedener im Maschinenbau vorkommender Körper (Maschinentheile) 54

I-Eisen-Tabelle der Burbacher Hütte bei Saarbrücken zur Berechnung von I-Träger-Querschnitten 77

Nr. der Aufgabe | Aufgaben aus der Lehre von der Torsionsfestigkeit. | Seite

1—11 Berechnung der Querschnittsdimensionen von Wellen und anderen im Maschinenbau vorkommenden auf Torsion beanspruchten Körpern (Maschinentheilen), mit und ohne Berücksichtigung der Größe der Verdrehung für verschiedene Querschnitte, Belastungsarten und Materialien. Berechnung des Verdrehungswinkels und der Faserspannung. Discussion der erhaltenen Resultate bei Schmiedeisen- und Gusstahlwellen für gleich große Kräfte. Berechnung von Torsionsfedern . . 78

Aufgaben aus der Lehre von der Zerknickungs- und zusammengesetzten Festigkeit.

1—20 Berechnung von Querschnitten, Tragkräften etc. verschiedener auf Zerknickungs- oder zusammengesetzter Festigkeit beanspruchter Maschinentheile und anderer Körper, als: Säulen, Schubstangen, Kolben- und andere Stangen, Kunstwinkel, Hängestützen, Krahnsäulen, Kurbel und Gegenkurbel etc. 85

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Vorbemerkung. In der folgenden Aufgabensammlung sind alle Längenmaße in Millimetern, alle Quadratmaße in Quadratmillimetern, die Cubikmaße in Cubikmillimetern angenommen, ausgenommen die Fälle, wo ein anderes Maß ganz besonders genannt wird. Das Zeichen „$\sim$“ heißt abgerundet oder angenähert.

I. CAPITEL.

Aufgaben aus der Lehre von der Zug-, Druck- und Scherfestigkeit.

In diesem Capitel werden folgende Formeln den Auflösungen der Aufgaben zugrunde gelegt:

1) $P = f \mathfrak{S}$ (Grundformel der Zug-, Druck- und Scherfestigkeit). Hierin bedeuten: P die Kraft in Kilogrammen, welche einen stabförmigen Körper auf Zug oder Druck in der Richtung der Achse oder auf Abscherung in Anspruch nimmt, f der tragende Querschnitt in mm^2, $\mathfrak{S}$ die Spannung, d. h. Zug-, Druck- oder Scherspannung, erlaubte Belastung auf $1\,mm^2$ Querschnittsfläche.

2) $\lambda = \frac{Pl}{Ef}$, hierin ist: λ die Ausdehnung oder Verkürzung, welche ein prismatischer Körper vom Querschnitte f und der Länge l in der Richtung seiner Achse durch die Kraft P erfährt, wenn E der Elasticitätsmodul des Stabmaterials ist.

---

1) Welche Zugbelastung P kann ein schmiedeiserner Stab von quadratischem Querschnitte mit Sicherheit ertragen, wenn die Quadratseite $30\,mm$ beträgt?

A. (= Auflösung). Mit $\mathfrak{S} = 7{\cdot}5$ (halber Tragmodul des Schmiedeisens) ist $P = 30 . 30 . 7{\cdot}5 = 6750\,kg$.

2) Welche Kraft P ist imstande, obigen Stab zu zerreißen?

A. Hier ist in Formel 1 für $\mathfrak{S}$ der Bruchmodul für Zug, für Schmiedeisen, $K = 40$ zu setzen, daher $P = 900 . 40 = 36.000\,kg$.

3) Welche Kraft P beansprucht den Stab aus Beispiel 1 bis zu seiner Elasticitätsgrenze?

A. In Formel 1 für $\mathfrak{S}$ den Tragmodul T für Zug, d. i. für Schmiedeisen, $T = 15$ gesetzt:

$$P = 900 . 15 = 13.500\,kg.$$

4) Es ist die Verlängerung λ des Stabes aus Beispiel 1 zu berechnen, wenn $P = 6750\,kg$, die Länge des Stabes $l = 5\,m$ ist.

A. In Formel 2 die gegebenen Werte, sowie $E = 20.000$ eingesetzt:

$$\lambda = \frac{6750 \,.\, 5000}{20.000 \,.\, 900} = 1{\cdot}875\, mm.$$

5) Welche Ausdehnung λ erleidet dieser Stab, wenn er bis zu seiner Elasticitätsgrenze belastet wird?

A. Die Kraft P, welche den Stab bis zu seiner Elasticitätsgrenze belastet, wurde in Beispiel 3 gefunden mit $P = 13.500$, daher diesen Wert und die übrigen Werte in Formel 2 eingesetzt:

$$\lambda = \frac{13.500 \,.\, 5000}{20.000 \,.\, 900} = 3{\cdot}75\, mm.$$

6) Welche Zugbelastung P bewirkt bei diesem Stabe eine Verlängerung von $10\, mm$?

A. Aus Formel 2 die Größe P bestimmt:

$$P = \frac{Ef\lambda}{l} = \frac{20.000 \,.\, 900 \,.\, 10}{5000} = 36.000\, kg = \text{Bruchbelastung}$$

(s. Beispiel 2), diese Verlängerung von $10\, mm$ würde also der Stab unmittelbar vor dem Zerreißen erfahren.

7) Welche Druckbelastung P kann ein Gusseisenstab mit Sicherheit ertragen, wenn der Querschnitt quadratisch und eine Quadratseite $50\, mm$ ist?

A. Die Druckspannung = dem halben Tragmodul, also $\mathfrak{S} = \frac{T_1}{2} = \frac{15}{2} = 7{\cdot}5\, kg$ genommen, so ist nach Formel 1

$$P = 50 \,.\, 50 \,.\, 7{\cdot}5 = 18.750\, kg.$$

8) Welche Kraft P würde den Stab in Beispiel 7 zerdrücken?

A. In Formel 1 für $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul K_1 des Gusseisens für Druck, $K_1 = 63$ gesetzt:

$$P = 50 \,.\, 50 \,.\, 63 = 157.500\, kg.$$

Bei den Beispielen 7 und 8 wird vorausgesetzt, dass der Stab eine so geringe Länge habe, dass eine Biegung desselben durch die Druckbelastung nicht eintritt.

9) Wie groß ist die Verkürzung λ, welche der Stab in Beispiel 7 durch eine Druckbelastung P erleidet, welche ihn bis zur Elasticitätsgrenze beansprucht, wenn die Stablänge $l = 300\, mm$ ist.

A. Hier ist $P = fT_1 = 50 \,.\, 50 \,.\, 15 = 37.500$ und

$$\lambda = \frac{37.500 \,.\, 300}{10.000 \,.\, 2500} = 0{\cdot}45\, mm.$$

10) Wie groß ist der Durchmesser d des kreisförmigen Querschnittes eines Gusseisenstabes von $3\, m$ Länge, der durch eine Zugbelastung von $1700\, kg$ eine Ausdehnung von $0{\cdot}5\, mm$ erleidet?

A. Formel 2 nach f aufgelöst:

$$f = \frac{Pl}{E\lambda} = \frac{1700 \,.\, 3000}{10.000 \,.\, 0{\cdot}5} = 1020 = \frac{d^2\pi}{4},$$ woraus $d = 36\, mm$ folgt.

Die in dem Stabe herrschende Spannung ist:

$\mathfrak{S} = \frac{P}{f} = \frac{1700}{1020} = 1\frac{2}{3}\, kg$, dies gibt mit $K = 11$ eine Bruchsicherheit

$$\text{von } s = \frac{K}{\mathfrak{S}} = \frac{11}{1\frac{2}{3}} = 6{\cdot}6.$$

11) Es ist der Durchmesser d des Rundeisens zu berechnen, das zur Herstellung einer offenen Kette verwendet werden soll, wenn dieselbe eine Last von $P = 1500\,kg$ tragen soll.

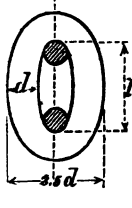
A. Wir nehmen mit genügender Annäherung für die Praxis den tragenden Querschnitt $f = 2 . \frac{d^2\pi}{4}$, womit aus Formel 1 sich $d = 12{\cdot}6\,mm$ ergibt, wenn $\mathfrak{S} = 6$ gesetzt wird. Allgemein ist

$$d = 0{\cdot}326\sqrt{P}.$$

Nach den von der englischen Marine mit Ketten angestellten Festigkeitsversuchen ergab sich, dass die Festigkeit der Kette mit offenen Gliedern (ohne Steg) sich zur Festigkeit des Rundeisens, aus dem die Kette gemacht ist, verhält wie 11 : 9 und die Festigkeit der einfachen Kette zu der der Stegkette wie 7 : 9, wobei eine vierfache Bruchsicherheit vorausgesetzt wird; darnach würde man für das vorliegende Zahlenbeispiel $d = 12{\cdot}5\,mm$ und allgemein $d = 0{\cdot}323\sqrt{P}$, für die Stegkette aber $d = 0{\cdot}28\sqrt{P}$ erhalten. Zwischen dem laufenden Gewichte G_0 einer Kette (Gewicht pro Meter Länge) und der Tragkraft P der Kette besteht ein festes Verhältnis, so dass man aus dem Gewichte der Kette und ihrer Länge L ihre Tragkraft berechnen kann, und zwar ist:

$G_0 = \frac{l_1 f \gamma}{l}$, worin l_1 die Länge der gekrümmten Mittellinie des geschlossenen Kettengliedes, $l_1 = 10{\cdot}85\,d$, l die lichte Länge des Kettengliedes, $l = 3{\cdot}5\,d$, f den Querschnitt des Ketteneisens, $\gamma = 7{\cdot}6$ das specifische Gewicht des Schmiedeisens bedeuten (s. Fig. 1). Mit diesen Werten erhält man: $G_0 = 0{\cdot}018504\,d^2 = 0{\cdot}001967\,P$, $P = 508{\cdot}38\,G_0$. Wäre z. B. bei einer Kette $G_0 = 10\,kg$, so ist die Tragkraft dieser Kette: $P = 508{\cdot}38 . 10 = 5083{\cdot}8\,kg$; der Durchmesser des Ketteneisens soll dann sein: $d = 0{\cdot}326\sqrt{5083{\cdot}8} = 23\,mm$.

Fig. 1.



Will man erfahren, wie lang die Kette sein muss, damit sie durch ihr eigenes Gewicht zerreiße, oder bei welcher Länge sie nichts mehr als ihr eigenes Gewicht mit Sicherheit tragen kann, so darf man nur in Formel 1 für $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul für Schmiedeisen, $K = 40$, beziehungsweise $\mathfrak{S} = 6$ und für P setzen: $P = G_0 L$; dadurch erhält man:

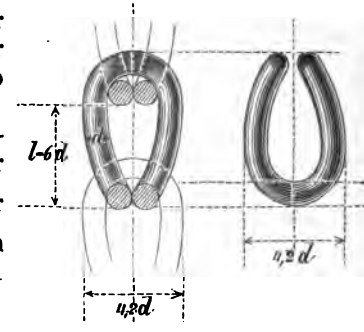
die Zerreißlänge in Metern $L_z = 3393{\cdot}8$,
„ Traglänge „ „ $L_t = 509{\cdot}07$.

12) Es ist der Durchmesser d des Rundeisens für eine offene Ringkette unter Berücksichtigung des eigenen Gewichtes G derselben zu berechnen, wenn die Kette, deren Glieder ebenso gestaltet sind wie im vorigen Beispiele, $300\,m$ lang ist und eine Tragkraft von $P = 1250\,kg$ haben soll.

A. Aus der Gleichung $P + G = \frac{d^2\pi\mathfrak{S}}{2}$ folgt, wenn man für G den Wert $G = G_0 L = 0{\cdot}018504\,d^2 L$ (L in Metern) und $\mathfrak{S} = 6$ setzt, $d = 18\,mm$.

13) Es ist der Durchmesser d des Rundeisens zu berechnen, das zu einer Schleifenkette verwendet wird, deren Glieder, wie Fig. 2 zeigt, gestaltet sind, *a)* ohne Berücksichtigung, *b)* mit Berücksichtigung des Eigengewichtes. Es ist ferner das Verhältnis der Tragkraft P dieser Kette zu dem Gewichte derselben pro laufenden Meter zu ermitteln.

Fig. 2.



A. Mit einer für die Praxis genügenden Annäherung ist hier der tragende Querschnitt $f = 4 . \frac{\pi d^2}{4}$, daher aus Formel 1: $d = 0{\cdot}23 \sqrt{P}$; in gleicher Weise wie in Beispiel 11 findet man hier:

$$G_0 = 0{\cdot}035796\, d^2 = 0{\cdot}00189\, P$$

und $P = 529{\cdot}1\, G_0$. Mit Berücksichtigung des Eigengewichtes findet man aus $P + G = \pi d^2 \mathfrak{S}$, wenn man $G = G_0 L = 0{\cdot}0358\, d^2 L$ und $\mathfrak{S} = 6$ setzt:

$$d\,mm = \sqrt{\frac{P}{\pi \mathfrak{S} - 0{\cdot}0358\, L m}}.$$

14) Es ist der Durchmesser d eines runden Hanfseils zu berechnen, das eine Last von $P kg$ tragen soll.

A. Die Hanfseile sind gewöhnlich dreilitzig und entweder **stehende** (zum ruhigen Tragen von Lasten bestimmt) oder **laufende** Seile (für Aufzugsmaschinen). Bezeichnet δ die Dicke einer Litze und d den Durchmesser des um die drei Litzen beschriebenen Kreises, so kann man $d = 2{\cdot}15\, \delta$ setzen, also

$$\frac{3\delta^2\pi}{4} = \frac{3 d^2 \pi}{4 . (2{\cdot}15)^2} = \frac{d^2}{2} = f,$$

womit aus Formel 1 mit $\mathfrak{S} = 2$ folgt: $d = \sqrt{P}$ **für stehende Seile**; **für laufende Seile** ist mit $\mathfrak{S} = \frac{4}{3}$,

$$d = 1{\cdot}225 \sqrt{P}.$$

Die Tragkraft ist für stehende Seile: $P = d^2$, für laufende Seile: $P = \frac{2}{3} d^2$. Die Gewichte der Seile verhalten sich unter der Voraussetzung gleicher Dichtigkeit wie die Querschnitte. Erfahrungsgemäß ist das Gewicht G_0 pro laufenden Meter bei den laufenden Seilen $G_0 = 0{\cdot}00071\, d^2$, bei stehenden Seilen $G_0 = 0{\cdot}000106\, d^2$ aus diesen Beziehungen und den Tragkräften der Seile folgt:

$$P = 938{\cdot}9\, G_0 \text{ für laufende Seile,}$$
$$P = 943{\cdot}4\, G_0 \text{ „ stehende „}$$

Ein laufendes Seil soll z. B. 625 kg tragen, es ist der Durchmesser d und das Gewicht von 20 m Seil zu berechnen. Man findet: $d = 1{\cdot}225 \sqrt{625} = 30{\cdot}6\ mm$, $G = 20 . 0{\cdot}00071\ (30{\cdot}6)^2 = 13{\cdot}312\ kg$.

15) Es ist die Breite b und die Dicke d eines flachen Hanfseils, das eine Last von $P kg$ tragen soll, zu berechnen.

A. Die flachen Hanfseile sind aus 4—6 runden Seillitzen zusammengenäht, so dass auf eine Litze der 4., bezüglich der 6. Theil der Last zu rechnen ist. Die Anzahl der Litzen sei allgemein n, der Durchmesser einer Litze d, dann ist der tragende Querschnitt $f = \frac{n d^2 \pi}{4}$, womit sich aus Formel 1 mit $\mathfrak{S} = 2$ ergibt: $d = 0{\cdot}8 \sqrt{\frac{P}{n}}$ und die Breite: $b = nd$.

16) Es ist der Durchmesser d eines runden Hanfseiles bei Berücksichtigung des Eigengewichtes G desselben zu berechnen, wenn das Seil eine Last von $P kg$ tragen soll.

A. Die das Seil spannende Kraft ist:

$P + G = P + 0{\cdot}00071\, d^2 L = 0{\cdot}5\, d^2 \mathfrak{S}$, woraus mit $\mathfrak{S} = 2$

$d = \sqrt{\frac{P}{1 - 0{\cdot}00071\, L}}$ für laufende Seile und

$d = \sqrt{\frac{P}{1 - 0{\cdot}00106\, L}}$ „ stehende „ folgt, wobei im letzteren Falle $G = 0{\cdot}00106\, d^2 L$ gesetzt wurde. Man ersieht aus diesen beiden Formeln, dass, wenn $1 = 0{\cdot}00071\, L$, also $L = 1408{\cdot}45\, m$, bezüglich $1 = 0{\cdot}00106\, L$, also $L = 943{\cdot}396\, m$ wird, die Seildicke d sich unendlich groß ergibt, d. h. das laufende Seil kann bei einer Länge von $1408{\cdot}45\, m$ nichts als sein eigenes Gewicht tragen, beim stehenden Seile ist dies der Fall, wenn seine Länge $943{\cdot}396\, m$ beträgt. Dieselben Werte von L ergeben sich auch, wenn man aus der Gleichung $G = f \mathfrak{S}$ oder $0{\cdot}00071\, d^2 L = 0{\cdot}5\, d^2 . 2$, bezüglich $0{\cdot}00106\, L d^2 = 0{\cdot}5 d^2 . 2$ den Wert von L bestimmt; ebenso findet man die Zerreißlänge eines laufenden Hanfseiles (Länge, bei der das Seil durch sein eigenes Gewicht zerreißt), wenn man in der Gleichung $0{\cdot}00071\, d^2 L = 0{\cdot}5\, d^2 \mathfrak{S}$ für $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul für Hanf, $K = 9$ setzt und L bestimmt, man erhält $L = 6338\, m$.

17) Es ist die Breite b und die Dicke d eines flachen Hanfseiles bei Berücksichtigung seines eigenen Gewichtes zu finden, wenn dasselbe eine Last von $P kg$ tragen soll, aus n runden Litzen besteht und eine Länge von $L m$ hat.

A. Die im Beispiel 14 für runde Hanfseile gefundenen Beziehungen $P = 938{\cdot}9\, G_0$ für laufende Seile und $P = 943{\cdot}4\, G_0$ für stehende Seile können angenähert auch für flache Hanfseile benutzt werden. Nimmt man den Durchschnitt $P = \frac{(938{\cdot}9 + 943{\cdot}4)\, G_0}{2} = 941{\cdot}15\, G_0 \sim 940\, G_0$ an, so erhält man mit dem hieraus resultierenden Werte von G_0 in Verbindung mit den Gleichungen: $P + G = P + G_0 L = \frac{n \pi d^2}{4} \mathfrak{S}$ und $d = 0{\cdot}8 \sqrt{\frac{P}{n}}$ (siehe voriges Beispiel) $d = \sqrt{\frac{601{\cdot}6\, P}{n (944{\cdot}512 - L)}}$, die Breite b ist $b = dn$; auch hieraus folgt, dass ein $944{\cdot}512\, m$ langes, flaches Hanfseil nichts mehr als sein eigenes Gewicht tragen kann, wenn die in demselben eintretende Spannung $2\, kg$ nicht übersteigen soll, gleichviel, wie dick auch das Seil genommen würde. Die Zerreißlänge

dieses Seiles ergibt sich mit $L_z = \frac{601{\cdot}6\,\pi\,.\,9}{4} = 4250{\cdot}304\,m$, wobei für $\mathfrak{S}$ der Bruchmodul $K = 9$ eingesetzt wurde.

18) Es ist der Durchmesser d eines runden Eisendrahtseiles, das als Lastseil dienen soll, zu berechnen, wenn dasselbe eine Zuglast von $P kg$ tragen soll.

A. Bezeichnet δ die Drahtdicke, i die Anzahl der im Seile vorhandenen Drähte und $\mathfrak{S}$ die in denselben eintretende Spannung, so ist der tragende Querschnitt des Seiles: $f = \frac{i\pi\delta^2}{4}$, womit aus Formel 1 mit $\mathfrak{S} = 8$ folgt: $\delta = 0{\cdot}4\sqrt{\frac{P}{i}}$, für $i = 36, 48, 54, 60, 66, 72$ ergibt sich

$$\frac{d}{\delta} = 8{\cdot}5,\ 10{\cdot}25,\ 11{\cdot}33,\ 12{\cdot}8,\ 13{\cdot}25,\ 14{\cdot}2,$$

für $i = 36$ ist $d = 0{\cdot}564\sqrt{P}$. Der Zusammenhang zwischen der Tragkraft P und dem Eigengewichte des Seiles ist gegeben durch die Beziehungen:

$G_0 = 0{\cdot}007\,\delta^2 i$ (Gewicht von $1\,m$ Eisendrahtseil) und mit Bezug auf den obigen Wert von δ,

$$P = 892{\cdot}85\,G_0.$$

19) Dieselbe Aufgabe wie die vorige, jedoch mit Berücksichtigung des Eigengewichtes G des Seiles von der Länge $L\,m$.

A. Die das Seil spannende Kraft ist:

$$P + G_0 L = P + 0{\cdot}007\,\delta^2 i L = \frac{i\pi\delta^2\mathfrak{S}}{4},\ \text{woraus mit}$$

$$\mathfrak{S} = 8, \qquad \delta = \sqrt{\frac{P}{i(2\pi - 0{\cdot}007\,L)}}\ \text{folgt; wird}$$

$2\pi = 0{\cdot}007\,L$, dann wird $\delta = \infty$, d. h. die Traglänge des Seiles ist:

$$L_t = \frac{2\pi}{0{\cdot}007} = 897{\cdot}143\,m,$$

bei dieser Länge kann das Seil außer seinem eigenen Gewichte nichts mehr tragen, wenn in demselben die Spannung $\mathfrak{S} = 8$ nicht mehr überschritten werden soll. Die Zerreißlänge ergibt sich aus der Gleichung

$$G = \frac{\pi\delta^2 i\mathfrak{S}}{4},$$

wenn man für $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul $K = 40$ setzt, mit $L_z = 6728{\cdot}58\,m$.

20) Wie verhalten sich bei gleicher Tragkraft die Durchmesser und die Gewichte der offenen Ringkette, des runden Eisendraht- und stehenden Hanfseils?

A. Bezeichnen d_1, d_2, d_3 bezüglich die Durchmesser des Ketteneisens, des 36drähtigen Eisendrahtseiles und des stehenden runden Hanfseils, G_1, G_2, G_3 die bezüglichen Gewichte pro $1\,m$ Länge, so findet man aus den für die Durchmesser und Gewichte früher entwickelten Formeln $d_1 : d_2 : d_3 = 8 : 14 : 25$, und $G_1 : G_2 : G_3 = 196{\cdot}7 : 112 : 106$, woraus hervorgeht, dass das Gewicht der Kette am größten, das Eisendrahtseil nur wenig schwerer als das Hanfseil

ist, welche Proportion bei der Berücksichtigung des Kostenpunktes beachtenswert ist.

Anmerkung. Bei der Berechnung eines Eisendrahtseiles wurde die zulässige Spannung $\mathfrak{S} = 8$ eingesetzt, demgemäß scheint es, als ob die Bruchsicherheit $\frac{K}{\mathfrak{S}} = \frac{60}{8} = 7{\cdot}5$ wäre, dieses ist jedoch nicht der Fall, sie ist weit geringer, denn das Drahtseil als Lastseil wird fast immer auf einer Trommel auf- und abgewickelt und erleidet dadurch eine Biegung, welcher das Drahtseil einen Widerstand (Seilsteifheit) entgegensetzt; es erleidet dadurch eine Biegungsbeanspruchung s und durch die Last P eine Zugbeanspruchung $\mathfrak{S}$. Eine nähere Untersuchung dieses Falles führt zu der Formel: $r = \frac{E\delta}{2s}$ *) worin r der Trommelhalbmesser, E der Elasticitätsmodul des Schmiedeisens ist. Die Zugspannung $\mathfrak{S}$ und die Biegungsspannung s setzen sich zusammen zu einer Totalspannung $s_1 = \mathfrak{S} + s$, welche den Tragmodul nicht erreichen darf; man findet, dass die Tragkraft P ein Maximum wird, wenn

$$r = \frac{3E\delta}{4s_1}$$

wird; durch Vergleich dieses Wertes mit dem obigen von r erhält man $\mathfrak{S} = \frac{s_1}{3}$, womit für $s_1 = 21$, $\mathfrak{S} = 7$, und $s = 14$ sich $r = \frac{3.20000\delta}{4.21} = 714{\cdot}28\,\delta$ ergibt; hieraus folgt die Bruchsicherheit $s_b = \frac{K}{s_1} = \frac{60}{21} = 2{\cdot}85$, oder mit $\mathfrak{S} = 8$, also $s_1 = 24$, $s_b = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$. Für Gusstahldrahtseile findet man $s_b = \frac{K}{s_1} = \frac{115}{30} = 3\frac{5}{6}$, wobei $\mathfrak{S} = 10$ und der Trommelhalbmesser sich mit $r = 687{\cdot}5\,\delta$ ergibt.

21) Es ist der Durchmesser d und die Drahtdicke δ eines Eisendrahtseiles zu berechnen, welches eine Länge von $L = 200\,m$ hat und eine Zuglast von $P = 1500\,kg$ zu tragen hat; das eigene Gewicht ist zu berücksichtigen; die Anzahl der Drähte im Seile ist $i = 72$.

A. Man findet nach Beispiel 19 mit $\mathfrak{S} = 7$, $\delta = 2{\cdot}25\,mm$; für $i = 72$, ist $d = 14{\cdot}2\,\delta = 14{\cdot}2\,.\,2{\cdot}25$, oder $d = 32\,mm$; der Halbmesser der Seiltrommel wird: $r = 714{\cdot}28\,.\,2{\cdot}25 = 1607\,mm$.

22) Wie verhalten sich bei gleichen Gewichten die Durchmesser d_1, d_2, d_3 und die Tragkräfte P_1, P_2, P_3 von offener Ringkette, rundem, 36drähtigem Eisendraht und rundem, stehendem Hanfseil?

A. Aus den für diese drei Zugorgane zwischen den Durchmessern und Eigengewichten bereits gefundenen Beziehungen: $G_1 = 0{\cdot}018504\,d_1^2$, $G_2 = 0{\cdot}252\,\delta^2 = 0{\cdot}252\,.\,\frac{d_2^2}{2i}$, $G_3 = 0{\cdot}00106\,d_3^2$ er-

*) Ausführliche Entwickelung siehe: Graf, Anwendungen der Festigkeitslehre, S. 27 (Spielhagen und Schurich, Wien).

gibt sich: $d_1 : d_2 : d_3 = 7{\cdot}348 : 16{\cdot}9 : 30{\cdot}7$, ebenso findet man aus den bereits bekannten Beziehungen: $P_1 = 508{\cdot}38\,G$, $P_2 = 892{\cdot}85\,G$, $P_3 = 943{\cdot}4\,G$ die Proportion: $P_1 : P_2 : P_3 = 508 : 893 : 943$, woraus ersichtlich ist, dass die Tragkraft des Hanfseils bei gleichen Gewichten der drei Zugorgane am größten ist, was hinsichtlich des Kostenpunktes zu beachten ist.

Für Gusstahldrahtseile findet man bei Berücksichtigung des Eigengewichtes des Seiles von der Länge $= L\,m$ die Drahtdicke

$$\delta = \sqrt{\frac{P}{(\mathfrak{S} - 0{\cdot}0095541\,L)\frac{i\pi}{4}}}$$

und bei einer Zugspannung von $\mathfrak{S} = \frac{K}{10} = \frac{115}{10} = 11{\cdot}5$.

$$\delta = \sqrt{\frac{P}{(9{\cdot}0275 - 0{\cdot}0075\,L)\,i}},$$

hieraus ist ersichtlich, dass $\delta = \infty$ wird, wenn $0{\cdot}0075\,L = 9{\cdot}0275$, also $L = 1203{\cdot}6\,m$ wird; dieses bedeutet, dass das Seil bei dieser Länge schon durch sein eigenes Gewicht auf seine ganze Tragfähigkeit beansprucht wird, wobei $\mathfrak{S} = 11{\cdot}5$ ist. Vergleicht man die Gewichte G_1 und G_2 des Gusstahldraht- und Eisendrahtseiles bei gleicher Tragfähigkeit und gleicher Bruchsicherheit, so findet man aus den für beide Seile geltenden Beziehungen für die Gewichte pro Meter Länge $G_1 = 0{\cdot}0075\,\delta_1^2 i_1$, $G_2 = 0{\cdot}0071\,\delta_2^2 i_2$, wenn man die Producte $\delta_1^2 i_1$ und $\delta_2^2 i_2$ durch die Tragkräfte P ausdrückt (mit Hilfe der für die Drahtdicke δ geltenden Formel ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes), die Proportion: $G_1 : G_2 = 83 : 151$, woraus hervorgeht, dass ein Gusstahldrahtseil, das ebenso tragfähig ist wie ein Eisendrahtseil, nahezu nur halb so viel wiegt wie das letztere, was für den Kostenpunkt beachtenswert ist.

23) Ein Gusstahldrahtseil von der Länge $L = 500\,m$ soll eine Last von $P = 2000\,kg$ tragen, die Drahtdicke δ und der Durchmesser d des Seiles sind unter Berücksichtigung des Eigengewichtes zu berechnen.

A. Mit $\mathfrak{S} = 10$ findet man nach der obigen, allgemeinen Formel für δ, wenn man noch $i = 72$ annimmt, $\delta = 2{\cdot}6\,mm$, also mit Bezug auf die kleine Tabelle in Aufgabe Nr. 18: $d = 14{\cdot}2\,.\,2.6 = 36{\cdot}92 \sim 37\,mm$; der kleinste Halbmesser r der zugehörigen Seiltrommel wird: $r = 687{\cdot}3\,\delta = 1787{\cdot}5\,mm$. Kann man jedoch den Trommelhalbmesser größer nehmen, z. B. $r = 3000$, so ergibt sich die Seildicke d weit schwächer, und zwar: Mit Hilfe der Gleichungen: $s = \frac{E\delta}{2r} = \frac{27500\,\delta}{2\,.\,3000} = \frac{55\,\delta}{12}$, $\mathfrak{S} = s_1 - s = 30 - \frac{55\,\delta}{12}$ und der letzten, allgemeinen Formel für δ findet man bei einer Drahtdicke von $2{\cdot}3\,mm$ die Drahtzahl $i = 36$, woraus sich aber die Seildicke mit $d = 8{\cdot}5\,.\,2{\cdot}3 = 19{\cdot}55\,mm$ ergibt (s. Beispiel 18 und Anmerkung zu 20).

24) Eine gusseiserne hohle Hängesäule von kreisförmigem Querschnitte soll eine Zugbelastung von $P = 6000\,kg$ tragen, es ist

der innere Durchmesser d_1 und der äußere Durchmesser d_2 zu berechnen, wenn die Wandstärke $w = 12\,mm$ ist.

A. Der tragende Querschnitt ist: $f = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)$, womit sich aus Formel 1 mit $\mathfrak{S} = 2$, $d_2 = 91{\cdot}6\,mm$ und $d_1 = 67{\cdot}6\,mm$ ergibt. Nimmt man jedoch statt der Wandstärke das Verhältnis $\frac{d_1}{d_2} = 0{\cdot}6$ an, so ist $P = \frac{\pi \mathfrak{S}}{4}(d_2^2 - 0{\cdot}36\,d_2^2)$, woraus mit $\mathfrak{S} = 2$, $d_2 = 77{\cdot}5\,mm$ und $d_1 = 46{\cdot}5\,mm$ folgt.

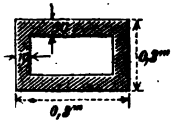
25) Welchen Durchmesser d soll eine der vier schmiedeisernen Säulen einer hydraulischen Presse erhalten, welche durch einen Druck von $P = 150.000$ die Zugfestigkeit der Säulen beansprucht?

A. Auf eine Säule kommt die Belastung von $37.500\,kg$, mit $\mathfrak{S} = 7{\cdot}5$, erhält man aus der Formel 1

$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 37500}{7{\cdot}5 \,.\, 3{\cdot}14}} = 79{\cdot}8\ mm.$$

26) Auf einen prismatischen, hohlen, gusseisernen, horizontal stehenden Untersatz, welcher zur Aufnahme einer Maschine bestimmt ist, wird von dieser letzteren ein Verticaldruck $P = 100.000\,kg$ ausgeübt; welche Wandstärke w muss der Untersatz erhalten, wenn der Querschnitt desselben ein hohles Rechteck ist? (s. Fig. 3). Die äußere Länge ist $l_1 = 0{\cdot}5\,m$, die äußere Breite $b_1 = 0{\cdot}3\,m$, die Höhe des Untersatzes ist gering, so dass das Gusseisen nur auf seine Druckfestigkeit beansprucht wird.

Fig. 3.



A. Die tragende Querschnittsfläche ist

$$f = l_1 b_1 - (l_1 - 2w)(b_1 - 2w),$$

in Formel 1 eingesetzt und die Gleichung nach der Unbekannten w aufgelöst:

$$w = \frac{b_1 + l_1}{4} \pm \sqrt{\frac{(b_1 + l_1)^2 \mathfrak{S} - 4P}{16\mathfrak{S}}},$$

den Umständen der Aufgabe gemäß muss hier das negative Vorzeichen genommen werden; mit $\mathfrak{S} = 5$ findet man $w = 12{\cdot}915 \backsim 13\,mm$.

27) Welchen Querschnitt f muss ein schmiedeisernes Schachtgestänge von der Länge $l = 300\,m$ erhalten, wenn dasselbe außer seinem eigenen, zu berücksichtigenden Gewichte noch eine Last von $P = 30.000\,kg$ zu tragen hat?

A. Da das eigene Gewicht des Gestänges $G = f l \gamma$ ist (γ = specifisches Gewicht des Schmiedeisens), so folgt aus der Gleichung $P + f l \gamma = f \mathfrak{S}$ der Querschnitt $f = \frac{P}{\mathfrak{S} - l\gamma}$; mit $\mathfrak{S} = 6$ und $\gamma = 7{\cdot}5$ findet man $f = 8000\,mm^2$, das Gewicht des Gestänges ist $G = 18.000\,kg$. Könnte man diesem Gestänge die Form der gleichen Festigkeit geben, so würde der kleinste Querschnitt $f_0 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = 5000$ und der größte Querschnitt

$f_n = \frac{Pe^{\frac{l\gamma}{\mathfrak{S}}}}{\mathfrak{S}} = 7090$ ($e = 2{\cdot}71828\ldots$ Basis der natürlichen Logarithmen). Das Gewicht dieses Gestänges wäre

$$G = \mathfrak{S}\left(f_n - \frac{P}{\mathfrak{S}}\right) = 12.540\,kg,$$

die Form der gleichen Festigkeit würde also eine Materialersparnis von $5460\,kg$ erzielen lassen.

28) Es ist der Durchmesser d eines cylindrischen, schmiedeisernen Stützzapfens einer stehenden Welle zu berechnen, wenn er in der Richtung seiner Längenachse einen Druck von $P kg$ auszuhalten hat.

A. Die Kraft P beansprucht die Druckfestigkeit des Zapfens; wegen möglichst geringer Abnützung nimmt man hier $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$; mit $\mathfrak{S} = 0{\cdot}333$ findet man aus Formel 1, wenn man darin $f = \frac{\pi d^2}{4}$ setzt, $d = 1{\cdot}956\sqrt{P} \backsim 2\sqrt{P}$.

29) Die Länge einer stehenden, schmiedeisernen Welle beträgt $l = 3\,m$, ihr Durchmesser sei $D = 80\,mm$, das Gewicht der auf ihr sitzenden Maschinentheile sei $P_1 = 200\,kg$; es ist der Durchmesser d des zugehörigen Stützzapfens zu berechnen.

A. Die den Zapfen beanspruchende Druckkraft ist das Gewicht der Welle und der darauf sitzenden Maschinentheile. Denkt man sich das Gewicht dieser letzteren als das Gewicht eines Cylinders von der Länge l_1 und dem Durchmesser D der Welle, so ist die Druckkraft $P = Lf\gamma = \frac{L\pi D^2\gamma}{4}$, wobei $L = l + l_1$ und γ das specifische Gewicht des Wellenmaterials ist. Mit $\gamma = 7{\cdot}5$ findet man aus der Gleichung $d = 2\sqrt{P}$ (s. voriges Beispiel), wenn man die Länge L in Metern einführt:

$$d = 0{\cdot}15\,D\sqrt{Lm},$$

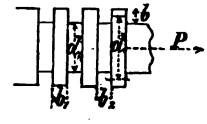
aus der Gleichung $P_1 = \frac{D^2\pi}{4} . l_1\gamma$ findet man

$$l_1 = \frac{4P_1}{D^2\pi\gamma} = \frac{4.200}{(80)^2 . 3{\cdot}14 . 7{\cdot}5} = 53{\cdot}17\,dm,$$

hiermit ist $L = l + l_1 = 3 + 5{\cdot}317 = 8{\cdot}317\,m$ (ideelle Wellenlänge); man findet nun hiermit $d = 0{\cdot}15 . 80\sqrt{8{\cdot}317} = 34{\cdot}56\,mm$.

30) Es sind die Festigkeitsdimensionen eines Kamm- oder Ringzapfens zu berechnen, der in der Richtung seiner Achse einen Druck von $P kg$ erfährt.

Fig. 4.



A. Der Zapfen habe z Ringe von der Breite b und der Dicke b_1, welche den Druck P aufnehmen, welcher die Druckfestigkeit der Ringe beansprucht; andererseits könnten auch die Ringe bei zunehmendem Drucke vom Kerne abgeschert werden (s. Fig. 4). Bezeichnet für die erste Beanspruchungsart d den mittleren Durchmesser eines Ringes, so ist die gedrückte Fläche $f = \pi d b z$, zwischen b

und d das gebräuchliche Verhältnis $b = 1{\cdot}2\sqrt{d}$, oder $d = 8\,b$ angenommen, so erhält man mit $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}$ aus Formel 1 für die erste Annahme: $d = 0{\cdot}85\sqrt[3]{\frac{P^2}{z^2}}$, für die zweite Annahme: $d = 2{\cdot}764\sqrt{\frac{P}{z}}$, wäre z. B. $P = 15.000\,kg$, $z = 10$, so ist nach der ersteren Formel: $d = 111{\cdot}37\,mm$ und $b = 12{\cdot}6\,mm$, nach der letzteren Formel $d = 107\,mm$ und $b = 13{\cdot}3\,mm$.

Für die zweite Beanspruchungsart der Abscherung der Ringe vom Kern hat man beim Kerndurchmesser d_1, $P = \pi\,d_1\,b_1\,z\,\mathfrak{S}_1$, $d_1 = d - b$, und für die Annahme $b_1 = b = \frac{d}{8}$, wird $b_1 = \frac{d_1}{7}$, womit aus der Gleichung $P = \pi\,d_1\,\frac{d_1}{7}\,.\,z\,.\,\mathfrak{S}_1$ folgt:

$$d_1 = 2{\cdot}64\sqrt{\frac{P}{\pi\,z\,\mathfrak{S}_1}};$$

es ist aber $d = d_1 + \frac{d}{8}$, daher findet man:

$$d = 3{\cdot}017\sqrt{\frac{P}{\pi\,z\,\mathfrak{S}_1}};$$

mittelst dieser Formeln für d und d_1 erhält man etwas größere Werte als nach der ersten Beanspruchungsart, auch hier wird $\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{3}$ genommen.

31) Es ist der Durchmesser d einer auf Zug oder Druck beanspruchten Kolbenstange des Dampfcylinders einer Dampfmaschine zu berechnen, wenn die Kolbenstange aus Schmiedeisen oder Gusstahl ist.

A. Es heiße der nützliche Dampfdruck auf den Kolben P, der Kolbendurchmesser sei D, die Spannkraft des Dampfes sei n Atmosphären, so ist $P = \frac{\pi D^2}{4}\,.\,0{\cdot}010333\,n = \frac{d^2\pi}{4}\,\mathfrak{S}$, woraus für Schmiedeisen mit $\mathfrak{S} = 6$

$$d = 0{\cdot}0408\,D\sqrt{n}$$

und für Gusstahl mit $\mathfrak{S} = 9$

$$d = 0{\cdot}03264\,D\sqrt{n} \text{ folgt.}$$

32) Es sind für eine Schubstange von kreisförmigem Querschnitte, die durch eine Kraft P nur auf Zug oder Druck beansprucht wird, Formeln zur Berechnung des mittleren Durchmessers d aufzustellen, wenn die Schubstange aus Schmiedeisen, Gusseisen, Gusstahl oder Eichenholz ist.

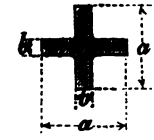
A. Setzt man in Formel 1 für f den Wert $f = \frac{\pi d^2}{4}$ und für $\mathfrak{S}$ der Reihe nach die Werte für die in der Aufgabe angegebenen Materialien, $\mathfrak{S} = 4,\ 2,\ 6,\ 0{\cdot}27$, so erhält man:

$d = 0{\cdot}56\sqrt{P}$ für Schmiedeisen,
$d = 0{\cdot}8\sqrt{P}$ „ Gusseisen,
$d = 0{\cdot}46\sqrt{P}$ „ Gusstahl,
$d = 2{\cdot}18\sqrt{P}$ „ Eichenholz.

33) Eine kurze gusseiserne Säule von kreuzförmigem Querschnitte (s. Fig. 5) wird durch eine Kraft P auf Druck beansprucht, es sind die Querschnittsdimensionen zu berechnen.

A. Der tragende Querschnitt setzt sich zusammen aus zwei Rechtecken von zusammen $f = a\,b + (a - b)\,b$; setzt man diesen Wert von f und $b = a\,\varphi$ (wo φ zweckmäßig gewählt wird) in Formel 1 ein und bestimmt a, so erhält man

Fig. 5.



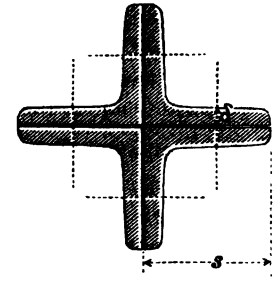
$$a = \varphi \sqrt{\frac{P}{(2\varphi - 1)\mathfrak{S}}},$$ für $\mathfrak{S} = 5$ und $\varphi = 7$ wird

$a = 0{\cdot}868 \sqrt{P}$, für $P = 10.000$ ergibt sich

$a = 86{\cdot}8 \backsim 87\,mm$ und $b = 12{\cdot}4 \backsim 13\,mm$.

34) Eine durch die Kraft P auf Zug beanspruchte Stange ist aus vier miteinander vernieteten Winkeleisen zusammengesetzt, so dass der Querschnitt kreuzförmig erscheint (s. Fig. 6). Es sind die Querschnittsdimensionen eines dieser Winkeleisen, das sind die Schenkellänge s und die mittlere Schenkeldicke δ, zu berechnen.

Fig. 6.



A. Die Querschnittsfläche eines Winkeleisens ist $f_1 = (2\,s - \delta)\,\delta$, diesen Wert von f_1, sowie $\mathfrak{S} = 6$ und $\delta = \frac{s}{\varphi}$ (wobei φ zweckmäßig gewählt wird) in Formel 1 eingesetzt und s berechnet:

$$s = 0{\cdot}204\,\varphi \sqrt{\frac{P}{2\varphi - 1}},$$

mit $P = 2500$, $\varphi = 5$, wird $s = 17$ und $\delta = 3{\cdot}4\,mm$.

Für den Fall, dass zwischen s und δ die im Maschinenbau gebräuchliche Beziehung $s = 10\,mm + 6\,\delta$ gebraucht wird, erhält man: In die Gleichung

$$f = \frac{4\,s^2}{\varphi^2}(2\varphi - 1) \text{ für } \varphi \text{ den Wert } \varphi = \frac{10}{\delta} + 6$$

gesetzt, gibt $f = 4\,\delta(20 + 11\,\delta)$, diesen Wert in Formel 1 eingesetzt und δ bestimmt:

$$\delta = -\frac{10}{11} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{11}\right)^2 + \frac{P}{44\,\mathfrak{S}}},$$

oder mit $\mathfrak{S} = 6$ und dem Gebrauch des positiven Vorzeichens:

$$\delta = 0{\cdot}0056 \sqrt{26400 + 121\,P} - 0{\cdot}91\,mm,$$

für $P = 2500$ gibt dies: $\delta = 2{\cdot}298\,mm$ und $s = 23{\cdot}792\,mm$; in beiden Fällen ist die tragende Querschnittsfläche f dieselbe. Berücksichtigt man jedoch den Umstand, dass durch das Vernieten der Winkeleisen der Querschnitt der ganzen Stange durch die Nietlöcher geschwächt wird, so ist der tragende Querschnitt um $16\,\delta^2$ kleiner, er ist dann nur $f = 4\,\delta(20 + 7\,\delta)$, woraus sich dann die etwas stärkeren Dimensionen $\delta = 2{\cdot}68$ und $s = 26\,mm$ ergeben.

35) Ein lederner Treibriemen von der Breite b und der Dicke δ soll von einer eisernen Riemenscheibe, welche u Umdrehungen pro

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Minute macht und einen Halbmesser $= R\,mm$ hat, N Pferdekräfte übertragen; die Dimensionen b und δ sind zu berechnen.

A. Sollen N Pferdekräfte von der einen Scheibe auf die andere übertragen werden, so muss dadurch auch eine Kraft P von dem Umfange der einen Scheibe auf den Umfang der anderen Scheibe übertragen werden, was nur durch die Reibung zwischen Riemen und Scheiben möglich ist. Die Größe dieser Reibung hängt ab von dem Reibungscoefficienten zwischen Leder und Eisen, von der Länge des Bogens, in welchem der Riemen die Scheibe umspannt und von der Spannung des Riemens. Es ist bekannt, dass die Differenz zwischen der im führenden Riemenstück herrschenden, größeren Spannung T_1 und der im geführten Riemenstück herrschenden, kleineren Spannung T_2 gleich der zu übertragenden Kraft $P = T_1 - T_2$ sein muss. Nach der Spannung T_1 muss der Riemen berechnet werden. Durch Anwendung des höheren Calculs findet man

$$T_1 = \frac{P e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha}}, \text{ oder mit } e = 2{\cdot}71828\ldots,\ \mu = 0{\cdot}28$$

(Reibungscoefficient) und $\alpha = 0{\cdot}8\,\pi$ (der vom Riemen umspannte Bogen) ist abgerundet $T_1 = 2\,P$. Bezeichnet v_1 die Umfangsgeschwindigkeit der Scheiben in Metern, v dasselbe in Millimetern, so ist

$$N = \frac{P v_1}{75}\ ,\quad 1000\,v_1 = v,\quad v = \frac{\pi R u}{30},\ \text{woraus}$$

$$P = \frac{716560\,N}{Ru} \text{ und hiermit aus der Gleichung}$$

$$T_1 = 2\,P = f\mathfrak{S},\quad f = \frac{1433120\,N}{Ru\,\mathfrak{S}}$$

folgt ($=$ Querschnittsfläche des Riemens). Mit $\mathfrak{S} = 0{\cdot}28$, $N = 10$, $R = 1000\,mm$, $u = 100$, erhält man $f = 512\,mm^2$; nehmen wir $\delta = 5\,mm$, so ist die Riemenbreite $b = 102{\cdot}4\,mm$.

Zu einer anderen sehr brauchbaren Formel für die Berechnung von b und δ gelangt man, wenn man die Erfahrungswerte $\mathfrak{S} = 0{\cdot}05\,\delta$ und $\delta = 0{\cdot}506\sqrt{b}$ in die Gleichung $b\,\delta = \frac{2P}{\mathfrak{S}}$ einführt, man erhält dadurch $b = 10580\sqrt{\frac{N}{Ru}}$, für die vorliegenden Zahlenwerte ergibt sich

$$b = 105{\cdot}8\,mm \text{ und } \delta = 5{\cdot}2\,mm.$$

36) Bei einem Drahtseilbetrieb von zwei gleich großen Seilscheiben vom Halbmesser R werden N Pferdekräfte bei u Touren pro Minute übertragen; es ist der Durchmesser d des Seiles zu berechnen.

A. Auch hier kann wie beim Riementrieb nur durch die Reibung eine Kraft P von der einen Scheibe auf die andere übertragen werden. Die die Reibung erzeugende Spannung des Seiles entsteht hier aber durch das Gewicht des schlaff von den Scheiben herabhängenden Seiles. Die größte im führenden Seilstück herrschende Spannung ist hier $T_1 = 2{\cdot}5\,P = f\mathfrak{S} = \frac{i\pi\delta^2}{4}\,.\,\mathfrak{S}$, mit $P = \frac{716560\,N}{Ru}$ (s. voriges Beispiel) und $\mathfrak{S} = 6$ erhält man: $\delta = 616{\cdot}8\sqrt{\frac{N}{Rui}}$.

Berücksichtigt man jedoch, dass in den Drähten des Seiles außer der Zugspannung $\mathfrak{S}$ auch noch eine Biegungsspannung s durch das Umbiegen des Seiles auf der Seilscheibe entsteht, so führt eine diesen Punkt berücksichtigende eingehende Rechnung (s. „Festigkeitslehre“ des Verfassers, S. 70, Anmerkung) zu der Formel: $\delta = 7{\cdot}696 \sqrt[3]{\frac{N}{iu}}$, wobei $\frac{s}{\mathfrak{S}} = 2$ und $R = 833{\cdot}3\,\delta$ ist. Mit einer für die Praxis genügenden Annäherung kann man setzen:

$$\left(\frac{3}{4}d\right)^2 \frac{\pi}{4} = \frac{\delta^2 \pi i}{4}, \text{ woraus}$$

$$d = \frac{4}{3}\delta\sqrt{i} \text{ folgt.}$$

37) An der Welle eines Drahtseiltriebes soll ein Widerstand von $50\,kg$, an einem Hebelarm von $1000\,mm$ wirkend, überwunden werden; es ist die Dicke d des Seiles und die Drahtdicke δ zu berechnen.

A. Wir machen die Annahme: $i = 36$, $R = 750\,mm$ = Halbmesser der gleich großen Seilscheiben. Aus der Gleichung $50 \cdot 1000 = 750\,P$ folgt: $P = 66\frac{2}{3}$ = der auf den Umfang der Scheibe übertragenen Kraft. Aus der Gleichung

$$f = \frac{T_1}{\mathfrak{S}} = \frac{2{\cdot}5\,P}{\mathfrak{S}} = \frac{\pi\delta^2 i}{4}$$

folgt, wenn man die Zahlenwerte, sowie $\mathfrak{S} = 6$ einsetzt:

$$\delta = 0{\cdot}96 \backsim 1\,mm,$$

$$d = \frac{4}{3}\delta\sqrt{36} = 8\,mm.$$

38) Es sind die Querschnittsdimensionen (Breite β und Dicke δ) eines zu einer Bandbremse einer gewöhnlichen Lastwinde gehörigen, schmiedeisernen Bremsbandes zu berechnen, wenn die zu hebende Last $Q = 2000\,kg$, der Durchmesser der Seiltrommel $2r = 300\,mm$ und der Halbmesser der Bremsscheibe $R = 400\,mm$ ist.

A. Die durch das Bremsen erzeugte Reibung muss so groß sein, dass der auf den Umfang der Bremsscheibe reducierte, zu bremsende Widerstand $P = \frac{Qr}{R} = T - t$ überwunden wird, das heißt, dieser Widerstand ist, ähnlich wie beim Riementrieb, gleich der Differenz der in dem Bremsbande herrschenden Spannungen T und t, auch hier ist $T = te^{\mu\alpha}$, für $\alpha = 1{\cdot}6\,\pi$ und $\mu = 0{\cdot}18$, ist $T = 2{\cdot}47\,t = 2{\cdot}47\,(T - P)$, woraus $T = 1{\cdot}68\,P = 1{\cdot}68\frac{Qr}{R}$ folgt. Durch diese Kraft T wird das Bremsband auf seine Zugfestigkeit beansprucht, daher nach Formel 1

$$\beta\delta = \frac{T}{\mathfrak{S}} = \frac{1{\cdot}68\,Qr}{R\mathfrak{S}},$$

oder die Zahlenwerte und $\mathfrak{S} = 6$ eingesetzt: $\beta\delta = 252\,mm^2$.

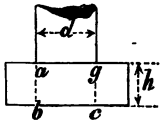
Nimmt man $\delta = 4\,mm$ an, so wird $\beta = 63\,mm$.

39) Es ist der Durchmesser d eines Schraubenbolzens mit scharfem Gewinde, die Höhe h des Schraubenkopfes, die Höhe h_1

der zugehörigen Schraubenmutter und die Schlüsselweite D derselben zu berechnen, wenn die Schraube durch eine in der Richtung ihrer Längenachse wirkende Kraft P auf Zug beansprucht wird.

A. Bezeichnet d den äußeren, d_1 den Kerndurchmesser der Schraube, s die Ganghöhe, t die Gangtiefe, so folgt nach Formel 1 aus: $P = \frac{\pi d_1^2 \mathfrak{S}}{4}$, wenn man $\mathfrak{S} = 2{\cdot}6$ setzt, $d_1 = 0{\cdot}7\sqrt{P}$, und nach den im Maschinenbau angewandten Constructionsformeln: $s = 1\,mm + 0{\cdot}08\,d$, $t = 0{\cdot}96\,s$, $d - d_1 = 2t$, erhält man: $d = 2{\cdot}268\,mm + 1{\cdot}181\,d_1$; es wäre z. B. $P = 900\,kg$, so folgt: $d_1 = 21$ und $d = 27\,mm$. Die Kraft P sucht den Bolzen in der Cylinderfläche $f = abcg = \pi d h$ (s. Fig. 7) auszuscheren, womit sich aus Formel 1 ergibt: $h = \frac{P}{\pi d \mathfrak{S}}$. Wegen der oft gebrauchten Methode der Herstellung des Kopfes durch Aufschweißen von Ringen auf dem Bolzenende nimmt man hier $\mathfrak{S} = 0{\cdot}8$ und erhält damit $h = \frac{900}{3{\cdot}14\,.\,27\,.\,0{\cdot}8} = 13{\cdot}2\,mm$.

Fig. 7.



Die Kraft P hat das Bestreben, die Gewinde vom Kerne in der Cylinderfläche $f = \pi d_1 h_1$ abzuscheren, womit man nach Formel 1 $h_1 = \frac{P}{\pi d_1 \mathfrak{S}_1}$, und wenn die Scherspannung

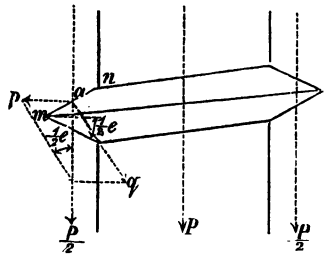
$$\mathfrak{S}_1 = \frac{7}{8}\mathfrak{S} = \frac{7}{8}\,.\,2{\cdot}6$$

genommen wird, $h_1 = 6\,mm$ erhält. In der Praxis wird jedoch bekanntlich die Höhe h_1 der Schraubenmutter wegen praktischer Rücksichten gleich dem äußeren Durchmesser der Schraube genommen; der Festigkeit wegen würde aber im vorliegenden Falle die gefundene Höhe $= 6\,mm$ genügen.

Berechnung der Schlüsselweite D.

Wird eine Schraubenmutter als ein sechsseitiges Prisma betrachtet, so ist D der Durchmesser des dem Sechseck eingeschriebenen Kreises. Addiert man daher zum äußeren Durchmesser d der Schraube die doppelte Wandstärke w der Mutter, so erhält man die Schlüsselweite $D = d + 2w$; es handelt sich also um die Bestimmung von w. Wird eine scharfgängige Schraube in der Richtung ihrer Achse durch die Kraft P auf Zug beansprucht, so entsteht nebst dem Druck, welcher die Reibung zwischen Bolzen und Mutter erzeugt, noch eine Kraft, die radial rechtwinkelig zur Schraubenachse nach außen wirkt und ein Aufreißen der Mutter zu bewirken bestrebt ist; es heiße diese Kraft p, so erhält man durch Zerlegung der Kraft $\frac{P}{2}$ (s. Fig. 8) in 2 Componenten p und q (letztere bewirkt die Reibung):

Fig. 8.



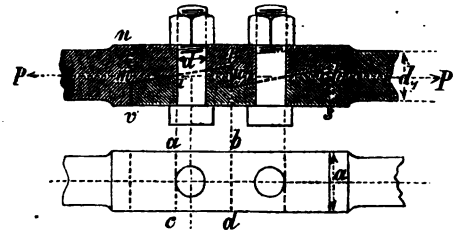
$p = \frac{P}{2} tg\, 27\frac{1^0}{2}$ (den Kantenwinkel nach Whitworth zu 55° angenommen), oder $p = 0{\cdot}261\,P$, die auf Ausscheren beanspruchte Fläche ist $f = w h_1$, daher nach Formel 1: $0{\cdot}261\,P = w h_1 \mathfrak{S}$, woraus mit $\mathfrak{S} = 2{\cdot}275$ und h_1 durch P ausgedrückt, folgt: $w = 0{\cdot}161\sqrt{P}$, dies gibt mit $P = 900$, $D = d + 2w = 27 + 9{\cdot}66 \backsim 37\,mm$; praktischer Rücksichten wegen gibt man jedoch 4—5 mm zu, erhält also $D = 42\,mm$, wie dies auch nach der im Maschinenbau gebrauchten üblichen Formel $D = 1{\cdot}4\,d + 4\,mm$ herauskommt.

40) Es ist der Kerndurchmesser d_1 und der äußere Durchmesser d der Schrauben zu berechnen, welche zum Deckelverschluss eines Dampfcylinders dienen, wenn der Dampfdruck auf den Deckel $P = 3770\,kg$ beträgt.

A. Nimmt man nach einer empirischen Formel die Anzahl der Schrauben $= 7$ an, so ist für eine Schraube der Zug in der Achse $p = \frac{P}{7}$, daher nach dem vorigen Beispiel $d_1 = 0{\cdot}7\sqrt{\frac{P}{7}} = 16{\cdot}25$ und der äußere Durchmesser $d = 2{\cdot}268 + 1{\cdot}181\,d_1 = 21{\cdot}46\,mm$.

41) Zwei Theile eines durch die Kraft $P = 2000\,kg$ auf Zug beanspruchten, schmiedeisernen Gestänges von kreisförmigem Querschnitte mit dem Durchmesser d_1 sind durch eine gezahnte Überplattung und Schrauben mit einander verbunden (s. Fig. 9), es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung zu berechnen.

Fig. 9.



A. Zur Vermeidung der Beanspruchung der Schrauben auf Abscherung sind hier die Zähne in der Überplattung angeordnet; die auf Abscherung beanspruchte Fläche der Zähne ist:

$$f = 2\left(a\,b\,c\,d - \frac{\pi d^2}{4}\right),$$

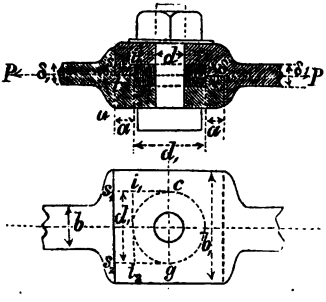
für den Fall jedoch, dass die Kraft P einmal nicht in der Richtung der Achse des Gestänges wirkt, kann es geschehen, dass durch das Abscheren von nur einer Zahnfläche und einer Schraube eine Trennung bewirkt wird; deshalb setzen wir: $f = a\,b\,c\,d - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$; berechnet man d aus der Formel $\frac{2\pi d^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$ (als ob die Schrauben auf Abscherung beansprucht würden), so erhält man mit $\mathfrak{S} = 5$, $d = 16\,mm$, daher $f = a\,b\,c\,d - 201 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{2000}{5}$, oder $a\,b\,c\,d = 201 + 400 = 601\,mm^2$. Durch die Überplattung wird der Querschnitt der Theile $m\,n$ und $r\,s$ sehr geschwächt, und es entsteht daher in Bezug auf die Querschnitte in diesen Theilen ein excentrischer Zug, welcher diese Theile bedeutend stärker beansprucht, als wenn die Kraft in der

Mitte von mn und rs angreifen würde, in diesem letzteren Falle würde es genügen, wenn die Fläche $\overline{mn} \cdot \overline{ac} = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{2000}{6} = 334\,mm^2$ wäre, aber wegen des excentrischen Zuges nehmen wir $\overline{mn} = 35$ und $ac = 50\,mm$, so dass die Querschnittsfläche $= 35 \cdot 50 = 1750\,mm^2$, also nahezu 5mal so groß ist, als dem centrischen Zuge entsprechen würde (was dann auch der Berechnung auf excentrischen Zug nahezu gleich kommt). Die Zahnhöhe mv nehmen wir dann mit $15\,mm$ an, so dass dann $h = mn + mv = 35 + 15 = 50\,mm = a$ wird; die Länge $iu = ab$ der Zahnspitze ergibt sich nun mit $\frac{601}{50} = 100\,mm$, aus constructiven Rücksichten nimmt man jedoch diesen Wert größer, etwa 25—30 mm. Der Durchmesser d_1 der Zugstange ergibt sich aus Formel 1 mit

$$d_1 = \sqrt{\frac{4P}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2000}{3 \cdot 14 \cdot 6}} \sim 21\,mm.$$

42) Zwei stabförmige Körper von rechteckigem Querschnitte sind durch eine Überplattung mit Einlegescheibe und Schraube verbunden (s. Fig. 10), es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung zu berechnen, wenn die verbundenen Theile durch eine in der Richtung ihrer Achse wirkende Kraft P auf Zug beansprucht werden.

Fig. 10.



A. Damit die Schraube vom Durchmesser d nicht auf Abscherung beansprucht wird, ist die Einlegescheibe vom Durchmesser d_1 angeordnet, deren abzuscherende Fläche ist $f = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d)$; der Wert von d ist hier, da die Schraube nicht durch die Kraft P auf Abscherung beansprucht werden soll, willkürlich zu nehmen; setzen wir $\frac{d^2\pi}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, so erhält man $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \mathfrak{S}}}$. Den Querschnitt der Stange bei $tu = a_1$ machen wir, weil in Bezug auf diesen Querschnitt die Kraft excentrisch wirkt, wenigstens 4mal so groß, als den Querschnitt $\delta_1 b$ der zu verbindenden Stangen, setzen also $\delta_1 b = \frac{a_1 b_1}{4}$; wenn die Kraft nicht centrisch wirkt, so kann das Endstück si abgeschert werden; der Sicherheit wegen setzen wir diese Fläche nur:

$$f = \frac{a\delta}{2} + \frac{a\delta}{2} + d_1 a = \frac{P}{\mathfrak{S}},$$

woraus $a = \frac{P}{\mathfrak{S}(\delta + d_1)}$ folgt. Die Dicke δ der Einlegescheibe bestimmt sich aus: $d\delta = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, es sei z. B. $P = 900\,kg$, das Material Schmiedeisen, so ergibt sich mit $\mathfrak{S} = 5$ abgerundet: $d = 15\,mm$,

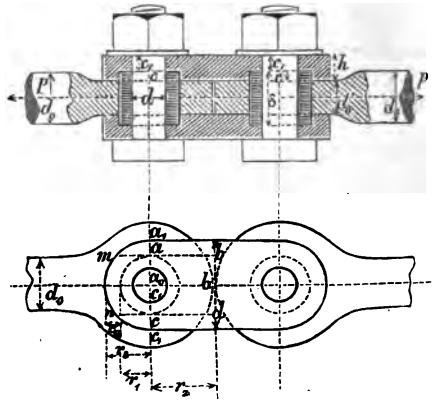
$$d_1 = \sqrt{\frac{4P}{\pi \mathfrak{S}} + d^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 900}{3 \cdot 14 \cdot 5} + (15)^2} \sim 22\,mm,$$

der größeren Aufsitzfläche wegen nehmen wir jedoch $d_1 = 30\,mm$; es sei ferner $\delta_1 = 10\,mm$, so wird $b = \frac{P}{\mathfrak{S}\delta_1} = \frac{900}{6.10} = 15\,mm$, $b_1 = 30\,mm$ angenommen, so ist $a_1 = \frac{4\delta_1 b}{b_1} = \frac{4.10.15}{30} = 20\,mm$,

$$\delta = \frac{900}{15.6} = 10\,mm \text{ und } a = 4\frac{1}{2}\,mm.$$

43) Es sind zwei schmiedeiserne Stangen von kreisförmigem Querschnitte durch zwei Laschen und zwei Schrauben mit Einlegescheiben zu verbinden (s. Fig. 11); es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung zu berechnen, wenn die beiden Stangen in der Richtung ihrer Achse durch die Kraft P auf Zug beansprucht werden.

Fig. 11.



A. Bei einer entsprechenden Vermehrung von P könnten entweder die Einlegescheiben in den Flächen $2 \cdot \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d^2)$ abgeschert, oder das Auge der Zugstange in der Fläche $2 r_2 d_0'$ (angenähert) ausgeschert, oder die beiden Laschen in den Flächen $4 \cdot \overline{am} \cdot c + 2\left(amne - \frac{\pi d_1^2}{8}\right)$ ausgeschert, oder endlich die Zugstange in der Querschnittsfläche $\frac{d_0^2 \pi}{4}$ zerrissen werden; im zweiten und dritten Fall rechnen wir jedoch der Sicherheit wegen die abzuscherenden Flächen nicht vom Schraubenmittel aus, sondern vom Umfange des Einlegeringes und erhalten daher für diese vier Fälle:

1) $f_1 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{\pi}{2}(d_1^2 - d^2)$,

2) $f_2 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = 2\,d_0'\,(r_2 - r_1)$,

3) $f_3 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = 4\,(r_3 - r_1)\,c + 4\,r_1\,(r_3 - r_1)$,

4) $f_4 = \frac{P}{\mathfrak{S}_1} = \frac{d_0^2 \pi}{4}$ ($\mathfrak{S}_1$ = Zugspannung, $\mathfrak{S}$ = Scherspannung).

Den Durchmesser d des Schraubenbolzens, der durch die Kraft P gar nicht beansprucht werden soll und nur einer zufälligen, senkrecht zu P wirkenden Kraft zu widerstehen hat, berechnen wir aus der Gleichung: $\frac{2\pi d^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}_1}$, wobei jedoch zu berücksichtigen ist, dass die Fläche $d\,\delta$ groß genug sei, um den Zug P, der die rückwirkende Festigkeit der Schraube mit der gedrückten Fläche $d\,\delta$ beansprucht, zu übertragen; hierbei ist d die Projection des Schrauben-

umfanges und δ die Höhe der gedrückten Fläche. Es sei z. B. $P = 3600\,kg$, dann ergibt sich aus obiger Gleichung für d, mit $\mathfrak{S}_1 = 6$, $d = 19{\cdot}5 \sim 20\,mm$, aus Gleichung 1 erhält man $f_1 = \frac{3600}{5} = 720\,mm^2$, $d_1 = 29{\cdot}3 \sim 30\,mm$, wir nehmen $d_0' = 20\,mm$ an; hiermit erhält man aus Gleichung 2: $f_2 = \frac{3600}{5} = 720\,mm^2$ und $r_2 = 33\,mm$, $r_1 = \frac{d_1}{2} = 15\,mm$; das Stück c, um welches der Ring in jede Lasche eingelassen ist, nehmen wir $c = 5\,mm$ an, damit ergibt sich aus Gleichung 3, $r_3 = 24\,mm$; aus Gleichung 4 ist $d_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot 3600}{3{\cdot}14 \cdot 6}} = 27{\cdot}6 \sim$ $\sim 28\,mm$. Die Dicke δ ergibt sich mit $\delta = d_0' + 2c = 20 + 10 = 30\,mm$, hiernach ist die Fläche

$$d\,\delta = 20 \,.\, 30 = 600 = \frac{P}{\mathfrak{S}_1} = \frac{3600}{6} = 600\,mm^2,$$

groß genug für die Druckübertragung. Zur Bestimmung der Laschendicke $h = c + c_1$ gelangt man wie folgt:

Die tragende Querschnittsfläche der beiden Laschenenden ist:

$$f_4 = \frac{3600}{6} = 4\,[(r_3 - r_1)\,c_1 + (r_3 - r_1)\,c],$$

woraus sich, wenn man die gefundenen Zahlenwerte einsetzt, ergibt:

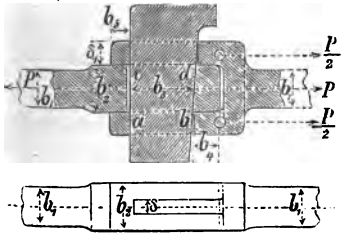
$$c_1 = 7\tfrac{1}{2}\,mm, \text{ also } h = 12\tfrac{1}{2} \sim 13\,mm,$$

die Breite b der Lasche wird nun:

$$b = \frac{3600}{6 \,.\, 12\frac{1}{2}} = 48\,mm.$$

44) Zwei Schmiedeisenstangen von quadratischem Querschnitte mit der Seite b_1 sind an den Enden derart mit einander verbunden, dass in das gabelförmige Ende der einen Stange das Ende der anderen Stange durch einen Keil befestigt ist (s. Fig. 12); es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung zu berechnen, wenn die Stangen durch die in entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte P, P auf Zug beansprucht werden.

Fig. 12.



A. Die Kräfte P, P haben das Bestreben: 1. die Stangen in der Querschnittsfläche b_1^2 zu zerreißen, 2. den Keil in den Flächen $\overline{ab} \,.\, \delta + \overline{cd} \,.\, \delta$ abzuscheren, 3. das verstärkte Ende der einen Stange an irgend einer Stelle des Keilloches in dem Querschnitte $b_2^2 - b_2\,\delta$ zu zerreißen, 4. die Gabelarme entweder an den Stellen, wo der Keil durchgeht, in den Querschnittsflächen $2\,(b_2\,\delta_1 - \delta\,\delta_1)$ zu zerreißen oder an den Enden in den Flächen $4\,\delta_1\,b_5$ auszuscheren und

5. die Stange mit dem verdickten Ende in den zwei Flächen $2 b_4 b_2$ auszuscheren.

Ad 1. Aus Formel 1 folgt: $b_1 = \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}}$, für $P = 5400$ und $\mathfrak{S} = 6$, wird $b_1 = 30\,mm$,

Ad 2. Zur Berechnung des Keilquerschnittes setzen wir $2 b_3 \delta = \frac{P}{\mathfrak{S}_1} = \frac{5400}{5} = 1080$ (Scherspannung $\mathfrak{S}_1 = 5$), setzen wir $\frac{b_3}{\delta} = 5$, so gibt dies $\delta = 10{\cdot}4\,mm$ und $b_3 = 52\,mm$.

Ad 3. Zur Berechnung der Quadratseite b_2 hat man:

$$b_2 = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{P}{\mathfrak{S}}},$$

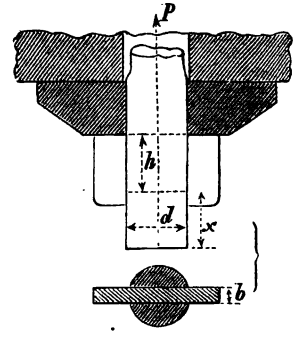
mit $\mathfrak{S} = 6$ als Zugspannung erhält man $b_2 = 36\,mm$.

Ad 4. Zur Berechnung der Dicke δ_1 der Gabelarme hat man aus: $2(b_2 \delta_1 - \delta \delta_1) = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, abgerundet $\delta_1 = 18\,mm$; damit die Gabelenden nicht ausgeschert werden, hat man aus der Gleichung $4 \delta_1 b_5 = \frac{P}{\mathfrak{S}_1}$ den Wert b_5 zu berechnen; man findet $b_5 = 15\,mm$.

Ad 5. Damit die Stange im verstärkten Ende nicht ausgeschert werde, muss $2 b_4 b_2 = \frac{P}{\mathfrak{S}_1}$ sein, woraus $b_4 = 15\,mm$ folgt.

45) Es sind bei einer Ankerschraube (s. Fig. 13) der Durchmesser d des unteren Bolzentheiles, die Höhe h des Splintes, die Dicke b desselben und die Länge x des Bolzenstückes, welches vom Splintloch nach unten vorsteht, zu berechnen, wenn die Schraube durch die Kraft P auf Zug beansprucht wird.

Fig. 13.



A. Die Kraft P hat das Bestreben, den Bolzen an seiner schwächsten Stelle in der Fläche $f_1 = \frac{\pi d^2}{4} - b d$ abzureißen, den Bolzen unter dem Splinte nach der Fläche $f_2 = 2 x d$ auszuscheren und endlich den Splint nach der Fläche $f_3 = 2 b h$ abzuscheren. Soll nun die Schraube in diesen drei Querschnittsflächen gleiche Sicherheit gegen Abreißen wie gegen Ausscheren besitzen, so muss nach Formel 1 $P = \left(\frac{\pi d^2}{4} - b d\right)\mathfrak{S} = 2 x d \mathfrak{S}_1 = 2 b h \mathfrak{S}_1$ sein ($\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ zulässige Zug- und Scherspannung). Hieraus folgt mit $b = \frac{d}{4}$ und $\mathfrak{S} = 2{\cdot}6$, $d = 0{\cdot}85\sqrt{P}$, für $P = 2500\,kg$ wird $d = 42{\cdot}5\,mm$; setzt man $\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}} = \frac{7}{8}$, so folgt aus obiger Gleichung $x = \frac{d(\pi - 1)}{7} = 0{\cdot}3\,d = 12{\cdot}75\,mm$, welcher Wert jedoch gewöhnlich der Sicherheit wegen noch überschritten wird, indem man $x = 0{\cdot}9\,d$ setzt; ferner folgt aus: $2 x d \mathfrak{S}_1 = 2 b h \mathfrak{S}_1$ der Wert $h = 4 x = 51\,mm$.

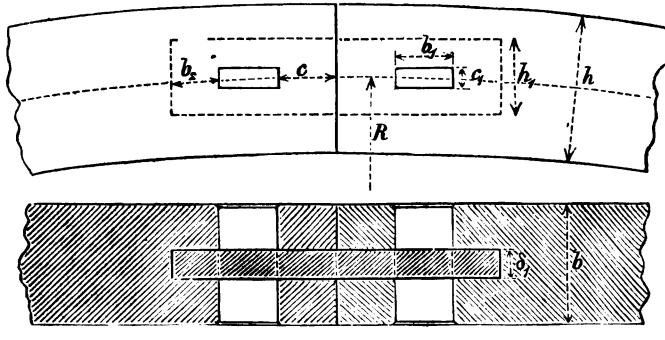
46) Welche Kraft muss angewendet werden, um ein Schmiedeisenblech von der Dicke $\delta = 10\,mm$ zu durchstoßen, wenn der Durchmesser des Loches $d = 20\,mm$ betragen soll?

A. Die durchzustoßende oder auszuscherende Fläche ist: $f = \pi d \delta$, diesen Wert von f und die Scherspannung $\mathfrak{S}_1 = K_1 = 35$ (Bruchmodul für Abscheren) in Formel 1 eingesetzt: $P = \pi d \delta K_1 = 21.980\,kg$.

47) Der Schwungring des Schwungrades einer Dampfmaschine bestehe aus 6 gleichen Theilen, von welchen jeder mit dem folgenden durch eine eingelegte, schmiedeiserne Platte und zwei Querkeile verbunden ist (s. Fig. 14). Es sind die Querschnittsdimensionen des Schwungringes, der eingelegten Platte und der Keile zu berechnen, wenn die Dampfmaschine N Pferdekräfte hat, u Umdrehungen pro Minute macht und der mittlere Halbmesser des Schwungringes $R = 3\,m$ beträgt.

A. Die bei der Rotation des Schwungrades entstehende Centrifugalkraft hat das Bestreben, ein Stück des Kranzes in zwei Querschnitten desselben herauszureißen und wird daher durch diese Kraft die absolute Festigkeit des Schwungringes beansprucht; die Rücksicht auf die Festigkeit des Kranzes allein ist jedoch nicht bestimmend für die Querschnittsdimensionen des Kranzes, sondern in Hinsicht des Zweckes des Schwungrades das Gewicht des Ringes,

Fig. 14.



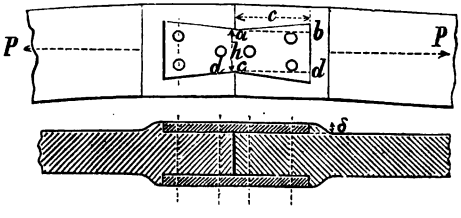
aus welchem sich dann der Querschnitt desselben ergibt. Es sei z. B. das Gewicht des Schwungringes mit $G = 6000\,kg$ berechnet worden, so muss der Querschnitt des Ringes $f = \frac{G}{2\pi R\gamma} = 43.626\,mm^2$ sein ($\gamma = 7{\cdot}3$ = specifisches Gewicht des Gusseisens). Berechnet man jedoch den Querschnitt des Ringes aus der Centrifugalkraft $F = \omega^2 M r$, worin ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades, M die Masse desjenigen Ringstückes vom Centriwinkel 2α ist, welches bei einer etwaigen Zerstörung des Ringes durch die Fliehkraft herausgerissen würde und r die Entfernung des Schwerpunktes dieses Stückes von der Drehachse bedeutet, so findet man durch eine theoretische Untersuchung*) für $u = 60$ Umdrehungen pro

*) Siehe Graf, Festigkeitslehre, S. 91 (Spielhagen & Schurich, Wien).

Minute: $M = 306$, $\omega^2 = 40$, $r = 2{\cdot}74\,m$, hiermit wird $F = 11.179{\cdot}2\,kg$; es ist $F = 2f\mathfrak{S}\sin\alpha$, für $\alpha = 30^0$ und $\mathfrak{S} = 3$ erhält man $f = 3727\,mm^2$, dabei ist es gleichgiltig, ob man den Ring aus 2 oder 6 Theilen zusammensetzt, denn für $\alpha = 90^0$, d. h. wenn bei einer Zerstörung des Rades der halbe Ring herausgerissen würde, ergibt sich für f derselbe Wert; dieser kleinere Wert von f wird benützt zur Bestimmung der Querschnittsdimensionen der Verbindungstheile (Platten und Keile), weil diese nur von der Fliehkraft beansprucht werden. Man nimmt hier für $\mathfrak{S}$ deshalb einen kleineren Wert als sonst bei Schmiedeisen, weil man im allgemeinen nicht voraussetzen darf, dass die Arbeit an den Verbindungsstellen der Kranztheile so exact ausgeführt wird, dass bei der Rotation des Rades nicht Stöße zwischen den Verbindungstheilen eintreten könnten, wodurch die Festigkeit der Theile bekanntlich bedeutend mehr beansprucht wird als bei ruhiger Belastung. Der Querschnitt f_1 der schmiedeisernen Verbindungsplatte wird: $f_1 = 3727 + c_1\delta_1$, nehmen wir $c_1 = 30$, $\delta_1 = 40$, so ist $f_1 = h_1\delta_1 = 3727 + 1200 = 4927\,mm^2$, hiermit wird abgerundet $h_1 = 124\,mm$.

Der Keil wird in den zwei Querschnitten $2b_1c_1$ auf Abscherung beansprucht, daher ergibt sich aus der Gleichung $2b_1c_1\mathfrak{S}_1 = h_1\delta_1\mathfrak{S}$: $b_1 = \frac{h_1\delta_1}{2c_1}\cdot\frac{8}{7} = 94\,mm$. Die Platte vom Querschnitte $h_1\delta_1$ wird ferner in den zwei Flächen $2b_2\delta_1$ auf Ausscheren der Endstücke beansprucht, daher ergibt sich aus der Gleichung $2b_2\delta_1\mathfrak{S}_1 = 2b_1c_1\mathfrak{S}_1$: $b_2 = \frac{b_1c_1}{\delta_1} = \frac{94.30}{40} = 70{\cdot}5\,mm$. Die Entfernung c des Keilloches von dem Ende des Ringstückes bestimmt sich aus der Gleichung: $f = 2c(b-\delta_1) = \frac{F}{2\mathfrak{S}_1\sin\alpha}$; zerlegt man den oben für den Schwungring gefundenen Querschnitt $f = 43.626$ in die zwei Factoren $h.b = 250.174{\cdot}504$, oder abgerundet die Kranzbreite $b = 175\,mm$ angenommen (rechteckiger Querschnitt des Kranzes vorausgesetzt), so ist der äußere Halbmesser des Ringes $R_1 = 3000 + 125 = 3125\,mm$ und der innere Halbmesser $R_2 = 3000 - 125 = 2875\,mm$; setzt man in die Gleichung $f = \frac{F}{2\mathfrak{S}_1\sin\alpha}$ für F den Wert $F = \omega^2 Mr$, wobei $M = \frac{\bar{a}G}{\pi g}$ ($g = 9{\cdot}81\,m$ = Fallbeschleunigung der Schwere) und nach der Schwerpunktslehre $r = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2}\right)$ ist, sowie $\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{2}$ ein, so findet man $f = 22.362\,mm^2$, hiermit erhält man aus der Gleichung $2c(b-\delta_1) = 22.362$: $c = 82{\cdot}8 \sim 83\,mm$.

Fig. 15.



48) Zwei Theile eines Schwungradkranzes sind durch zwei an den Seiten

des Kranzes eingelegte, schwalbenschwanzartig geformte Schmiedeisenplatten und durch 6 Schrauben miteinander verbunden (s. Fig. 15); es ist der Durchmesser d einer Schraube und die Dimensionen einer Platte zu berechnen, wenn die infolge der Fliehkraft entstehende, den Kranz auf Abreißen beanspruchende Kraft $P = 10.000\,kg$ ist und deren Richtung senkrecht zur Trennungsfläche beider Kranztheile steht.

A. Der Schraubendurchmesser d wird berechnet aus: $6 \cdot \frac{d^2\pi}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, mit $\mathfrak{S} = 5$ findet man abgerundet: $d = 21\,mm$. Eine jede der beiden Platten wird in der Fläche $h\delta$ auf Zug beansprucht, wir setzen aber der Sicherheit wegen $f = 2(h\delta - d\delta) = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, woraus mit der Annahme $\frac{h}{\delta} = 3$ und $\mathfrak{S} = 5$, $\delta = 22$ und $h = 66\,mm$ folgt. Eine jede der beiden Platten wird ferner in den zwei Flächen $2c\delta$ auf Abscherung beansprucht, daher findet man aus der Gleichung $4c\delta = \frac{P}{\mathfrak{S}_1}$, mit $\mathfrak{S}_1 = 3$, $c = 37{\cdot}9\,mm$, aus constructiven Rücksichten wird man aber diese Dimension größer, hier etwa zweckmäßig $85\,mm$ nehmen.

Fig. 16.

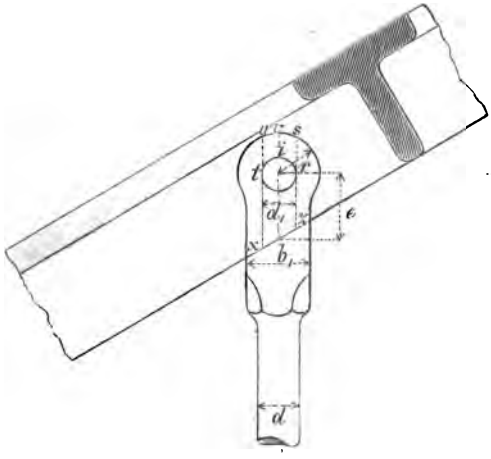
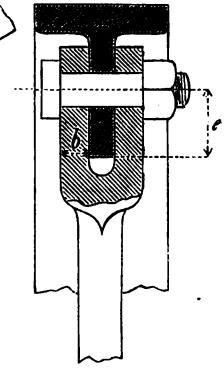


Fig. 17.



49) Eine schmiedeiserne Zugstange von kreisförmigem Querschnitte, welche durch die Kraft $P = 4240\,kg$ auf Zug beansprucht wird, ist mittelst eines Bolzens vom Durchmesser d_1, der durch das gabelförmige Ende (Ohr) der Zugstange geht, an einem eisernen Dachsparren von T-förmigem Querschnitt befestigt (s. Fig. 16 u. 17). Es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung, d. h. der Durchmesser d der Stange, der Durchmesser d_1 des Bolzens, die Breite b_1 und die Dicke b eines Gabelarmes, sowie endlich der Halbmesser r des Gabelohres zu berechnen.

A. Den Wert $f = \frac{d^2\pi}{4}$ in Gleichung 1 eingesetzt und d bestimmt, gibt mit $\mathfrak{S} = 6$: $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi\mathfrak{S}}} = 30\,mm$. Da der Bolzen vom Durch-

messer d_1 zweischnittig ist, so folgt aus der Gleichung $\frac{2.\pi d_1^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}_1}$ mit $\mathfrak{S}_1 = 5$: $d_1 = 23\frac{1}{4}\,mm$; die Dimensionen b und b_1 der Gabelarme bestimmen sich aus der Gleichung $2\,b\,b_1 = \frac{\pi d^2}{4}$, woraus mit $b_1 = 1{\cdot}25\,b$ (beliebige Annahme), $b = 9{\cdot}42$ und $b_1 = 37{\cdot}5\,mm$ folgt. Das Gabelohr würde bei entsprechender Vergrößerung von P in den Flächen $2\,(\overline{ut}.b)$ und $2\,(\overline{rs}.b)$ ausgeschert werden; der Sicherheit wegen führen wir jedoch das Stück $iv = c = r - \frac{d_1}{2}$ in die Rechnung ein und erhalten aus der Gleichung $4\,b\,c\,\mathfrak{S}_1 = \frac{\pi d^2}{4}\,\mathfrak{S}$ den Wert von $c = \frac{\pi d^2}{14\,b}$, womit man abgerundet $r = 34{\cdot}5\,mm$ erhält. Damit endlich ein Ausscheren des Sparrens nicht eintrete, muss die Gleichung stattfinden: $P = 2\,e\,\delta\,\mathfrak{S}_1 = 2\,b\,b_1\,\mathfrak{S}$, wobei δ die Dicke der Sparrenrippe ist; setzen wir $\delta = b = 10\,mm$, so wird $e = \frac{b_1\,\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} = 42{\cdot}8\,mm$.

50) Die hölzerne Säule eines Hängewerks hat einen Zug von $P = 8000\,kg$ auszuhalten, es soll mit der Säule der horizontale Balken A (s. Fig. 18), dessen Breite $130\,mm$ beträgt, mittelst Eisen-

Fig. 18.

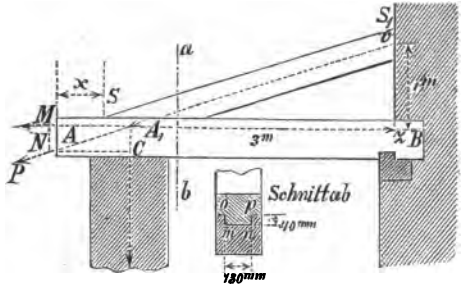
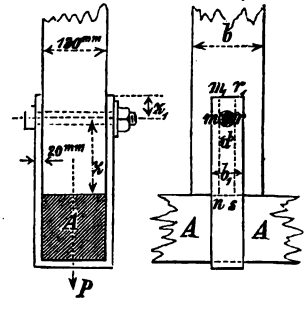


Fig. 19.



band und Bolzen verbunden werden; es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung zu berechnen.

A. Der Bolzen vom Durchmesser d ist zweischnittig, daher $f = \frac{2\pi d^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}_1}$, woraus $d = 32\,mm$ folgt. Mit Rücksicht auf die Länge des Bolzens nehmen wir jedoch, um einer etwaigen Biegung vorzubeugen, $d = 40\,mm$. Die Dicke b der Hängesäule ergibt sich aus der Gleichung $f = 130\,b - 130\,d = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, woraus, abgerundet, $b = 133\,mm$ folgt. Wählt man für das Eisenband ein Flacheisen von $20\,mm$ Stärke, so ergibt sich die Breite b_1 des Bandes aus $f = 2\,.\,20\,b_1 - 2\,d\,.\,20 = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, mit $b_1 = 73{\cdot}3\,mm$. Damit ein Ausscheren des Holzes am unteren Ende und ein Ausscheren des Eisenbandes

am oberen Ende nicht eintrete, müssen die Gleichungen stattfinden:

$$f = 260\,(z - 20) = \frac{P}{\mathfrak{S}} \text{ und } f = 4 \cdot 20\left(z_1 - \frac{d}{2}\right) = \frac{P}{\mathfrak{S}_1},$$

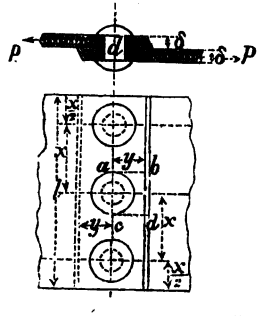
woraus, mit $\mathfrak{S} = 0{\cdot}07$ und $\mathfrak{S}_1 = 5$, $z = 440$ und $z_1 = 40\,mm$ folgt.

51) Der Sparren SS_1 eines Pultdaches (s. Fig. 19) hat einen Druck von $P = 5000\,kg$ in der Richtung seiner Achse auszuhalten und ist mit dem horizontalen Balken AB verzapft; der Zapfen ist $40\,mm$ hoch und $130\,mm$ breit, es soll berechnet werden, in welcher Entfernung x derselbe vom Ende des Balkens AB anzuordnen ist, damit ein Ausscheren des Balkens AB in dem Stücke AA_1 nicht eintrete; in dem rechtwinkligen Dreiecke A_1zv ist $zv = 1\,m$, $A_1z = 3\,m$.

A. Zerlegt man die Kraft P in die zwei aufeinander rechtwinkelig stehenden Componenten $A_1M = p$ und $A_1C = q$, so ist p die Größe des Horizontalschubes, welcher das Balkenstück von der Länge x auszuscheren bestrebt ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke A_1MN und A_1vz folgt, weil $A_1v = \sqrt{10}$ ist, $p : 5000 = 3 : \sqrt{10}$, woraus sich $p = 4744\,kg$ ergibt. Die bei der Abscherung entstehenden Trennungsflächen sind: $130\,x$ und $2 \cdot 40\,x$, daher die ganze abzuscherende Fläche $f = 210\,x = \frac{p}{\mathfrak{S}_1} = \frac{4744}{0{\cdot}07}$, woraus $x = 322{\cdot}7\,mm$ folgt.

52) Es sind bei einer Nietverbindung (einfache Überplattungsnietung, s. Fig. 20) der Durchmesser d eines Nietbolzens, die Entfernung x zweier benachbarter Nietenmittel einer Nietreihe, die Entfernung y der Mittellinie der Nietreihe vom Blechrande zu bestimmen, wenn die Nietnaht nur eine Nietreihe enthält und die Verbindung von den Kräften P, $-P$, deren Richtung senkrecht zur Nietbolzenachse ist, derart angegriffen werden, dass sie das Blech auseinander zu ziehen und die Bolzen abzuscheren suchen.

Fig. 20.



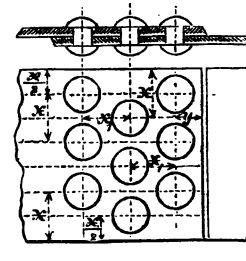
A. Es bezeichne n die Anzahl der Nieten einer Nietreihe. Die Kräfte haben das Bestreben, die Nietbolzen in der Gesammt-Querschnittsfläche $f_1 = \frac{n\pi d^2}{4}$ abzuscheren, ferner das Blech zwischen den Nietlöchern in der Querschnittsfläche $f_2 = \delta\,(l - n\,d)$ abzureißen (l = Länge der Naht). Von dem Bestreben der Kräfte, das Blech mit dem Momente $P\delta$ zu biegen, sehen wir ab. Wir machen die Annahme, dass die beiden Nietenmittel an den Enden der Naht je $\frac{x}{2}$ vom Blechrande entfernt sind; dann kann man auch setzen: $f_2 = n\,\delta\,(x - d)$. Soll die Nietverbindung in allen ihren Theilen gleiche Festigkeit haben, so muss die Gleichung stattfinden: $P = f_1\mathfrak{S}_1 = f_2\mathfrak{S}$. Für die Widerstandsfähigkeit der Nietungen haben Versuche ergeben, dass man $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}$ setzen kann, daher

$$P = \frac{n\pi d^2\mathfrak{S}}{4} = n\,\delta\,(x - d)\,\mathfrak{S};$$ hieraus ist: $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi n \mathfrak{S}}}$;

die Anzahl n der Nietbolzen kann zwar beliebig gewählt werden, jedoch muss dies immer mit Rücksicht darauf geschehen, dass der Durchmesser d nicht zu groß ausfalle im Verhältnisse zur Blechdicke δ; man nimmt häufig $\frac{d}{\delta} = 2$, es ist jedoch durchaus nicht gleichgiltig, wie man dieses Verhältnis nimmt (wie noch später gezeigt werden wird); für $\frac{d}{\delta} = 2$ findet man, dass die Druckspannung, welche das Blech im halben Nietloch auszuhalten hat, schon größer ist als die Zugspannung des Bleches; es ist die Druckspannung $\mathfrak{S}_1 = 1{\cdot}57\,\mathfrak{S}$, für $\frac{d}{\delta} > 2$ wird $\mathfrak{S}_1$ noch größer, wodurch am Nietloch auf der Druckseite aufgeworfene Blechränder entstehen können. Aus obiger dreitheiliger Gleichung folgt: $x = 2{\cdot}57\,d$. Zur Bestimmung von y setzen wir $y\delta = \frac{\pi d^2}{4}$, woraus mit $d = 2\delta$, $y = 1{\cdot}57\,d = x - d$ folgt. Die Anzahl n der Nietbolzen bestimmt sich aus der Gleichung: $f_2 = \delta\,(l - n\,d) = \delta\,n\,(x - d)$, woraus $n = \frac{l}{x}$ oder $n = 0{\cdot}389\frac{l}{d}$, oder abgerundet $= \frac{0{\cdot}12\,\mathfrak{S}\,l^2}{P}$ folgt. Es sei z. B. $l = 1\,m$, $P = 20.000\,kg$, dann ist mit $\mathfrak{S} = 5$, $n = 30$, $x = \frac{l}{n} = \frac{1000}{30} = 33\frac{1}{3}\,mm$, $d = 13\,mm$ und $y = 20{\cdot}4\,mm$.

53) Dieselbe Aufgabe wie die vorige, nur mit dem Unterschiede, dass die Nietverbindung eine mehrfache Überplattungsvernietung ist, d. h. die Nietnaht besteht aus mehr als einer Nietreihe.

Fig. 21.



A. Es heiße die Anzahl der Nietreihen i, dann muss, wenn die Nietbolzen denselben Widerstand gegen Abscheren wie das Blech zwischen den Nieten gegen Abreißen haben sollen, die Gleichung stattfinden:

$$P = \frac{n i \pi d^2 \mathfrak{S}}{4} = (l - n\,d)\,\delta\,\mathfrak{S}.$$

Die Anordnung sei so getroffen, dass die Nieten in den einzelnen Reihen gegen einander versetzt erscheinen (s. Fig. 21), dann ist: $l - n\,d = n\,(x - d) + \frac{x}{2}$, daher $P = \frac{n i \pi d^2 \mathfrak{S}}{4} = \left[n\,(x - d) + \frac{x}{2}\right]\delta\,\mathfrak{S}$, hieraus folgt: $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi i n \mathfrak{S}}}$ und mit $d = 2\delta$, $x = \frac{n d (i\pi + 2)}{2n + 1}$; die Anzahl n der Nieten wird bestimmt aus: $l - n\,d = (x - d)\,(n - 1) + \frac{3x}{2} - d$, mit $n = \frac{2l - x}{2x}$, oder x durch d ausgedrückt: $n = \frac{2l}{d(i\pi + 2)}$, oder für d den Wert gesetzt: $n = \left(\frac{l}{\pi i + 2}\right)^2 \frac{\pi i \mathfrak{S}}{P}$, diesen Wert von n in die Gleichung für d gesetzt, gibt d unabhängig von n mit: $d = \frac{2P(i\pi + 2)}{\pi i \mathfrak{S} l}$; es sei $P = 20.000\,kg$, $i = 2$, $l = 1\,m$, dann ist:

$n = 22{\cdot}96 \sim 23$, $d = 10{\cdot}52 \sim 11\ mm$, $x = 42{\cdot}55 \sim 43\ mm$, $y = 17{\cdot}27\ mm$; die Entfernung x_1 je zweier Nietreihen von einander ist zwar beliebig, man nimmt jedoch gewöhnlich $x_1 = 2{\cdot}5\,d$ bis $3\,d$.

54) Es ist zu untersuchen, wie sich bei der einfachen Überplattungsvernietung die Tragkraft des vollen Bleches zu der in der Nietnaht verhält, welchen Einfluss auf dieses Verhältnis die Anzahl i der Nietreihen hat und welchen Einfluss das Verhältnis $\frac{d}{\delta}$ auf die Festigkeit der Nietstelle hat.

A. Der volle Blechquerschnitt ist $\delta l = \frac{ld}{2}$, hierin den Wert von l aus der Gleichung $\frac{n\pi d^2}{4} = (l - n\,d)\frac{d}{2}$ eingesetzt, gibt mit Rücksicht auf die Beziehung, $P = l\delta\mathfrak{S}$, die Tragkraft des vollen Bleches: $P = \frac{nd^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\mathfrak{S}$; die Tragkraft der Nietstelle ist: $P_1 = \frac{n\pi d^2\mathfrak{S}}{4}$, woraus folgt: $P : P_1 = 100 : 61$, daher die Tragkraft des vollen Bleches 39% größer ist als die der Nietstelle, somit wird die Festigkeit des vollen Bleches nicht ganz ausgenützt; ordnet man jedoch die Nieten in mehreren Reihen an, in welchen sie gegen einander versetzt erscheinen, so wird der Unterschied zwischen der Festigkeit der Nietstelle und der des vollen Bleches immer kleiner, je größer die Anzahl i der Nietreihen wird, wie dies folgende Rechnung zeigt: die Tragkraft des vollen Bleches ist $P = l\delta\mathfrak{S}$, hierin $\delta = \frac{d}{2}$ und für l den Wert aus der Gleichung $\frac{n\pi d^2 i}{4} = (l - n\,d)\frac{d}{2}$ gesetzt, gibt: $P = \frac{nd^2}{2}\left(\frac{\pi i}{2} + 1\right)\mathfrak{S}$, die Tragkraft der Nietstelle ist: $P_1 = \frac{n\pi d^2 i\mathfrak{S}}{4}$, durch Vergleichung von P mit P_1 folgt:

$$P : P_1 = 1 : \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi i}},$$

das vierte Glied dieser Proportion nähert sich immer mehr der Einheit, je größer i wird; für $i = 2$ wird $\frac{P}{P_1} = \frac{100}{75}$, für $i = 3$ wird $\frac{P}{P_1} = \frac{100}{83}$; man sieht, dass bei zwei Nietreihen die Tragkraft der Nietstelle um 25%, bei drei Nietreihen um circa 17% kleiner als die Tragkraft des vollen Bleches ist.

Wir hatten bei der einfachen Überplattungsvernietung die Gleichung: $\frac{n\pi d^2}{4} = n\delta(x - d)$, hieraus folgt: $\frac{x}{\delta} = \frac{d}{\delta} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2$, die relative Verschwächung des Bleches in der Nietstelle kann dargestellt werden durch den Ausdruck: $\frac{x - d}{x}$, aus der letzten Gleichung folgt: $\frac{x - d}{x} = \frac{1}{1 + \frac{4\delta}{\pi d}}$, aus den letzten zwei Gleichungen ist ersichtlich, dass, je kleiner das Verhältnis $\frac{d}{\delta}$ genommen wird, desto kleiner auch $\frac{x}{\delta}$, also desto dichter die Fuge wird; für $\frac{d}{\delta}$ wird man daher

bei genieteten Gefäßen, welche wegen ihres Inhaltes dicht halten müssen, wie Dampfkessel, ein möglichst kleines Verhältnis wählen, je größer $\frac{d}{\delta}$ genommen wird, desto mehr nähert sich der Bruch $\frac{x-d}{x}$ der Einheit, d. h. desto kleiner wird die relative Verschwächung des Bleches in der Nietstelle, also desto größer die Festigkeit derselben. Die Vergrößerung des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$ kann jedoch bei der Anordnung, alle Nieten in eine Reihe zu stellen, nur bis zu der Grenze gehen, dass die Größe des Normaldruckes zwischen dem Nietbolzen und seiner halbcylindrischen Stützfläche im Nietloch einen bereits früher angegebenen Wert von $\mathfrak{S}_1 = 1{\cdot}57\,\mathfrak{S}$ nicht viel überschreitet, damit keine aufgeworfenen Ränder an den Druckseiten der Nietlöcher entstehen. Soll diese Druckspannung $\mathfrak{S}_1 = \frac{P}{d\delta}$ nicht größer sein als die auf die Nietbolzen ausgeübte Scherspannung, so muss $d\delta\mathfrak{S} = \frac{\pi d^2}{4}\mathfrak{S}$ sein, woraus $\frac{d}{\delta} = \frac{4}{\pi} = 1{\cdot}27$ folgt.

Für sogenannte Festigkeitsnietungen, wie z. B. Brückenträger, wird man also das Verhältnis $\frac{d}{\delta}$ größer, bei Gefäßnietungen wegen des dichten Verschlusses kleiner nehmen, man findet z. B. bei:

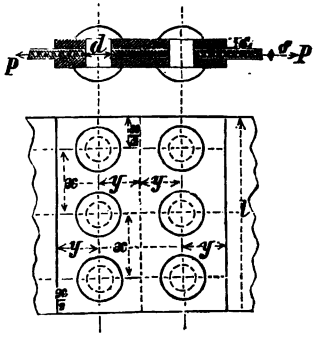
$$\frac{d}{\delta} = 1{\cdot}5, \quad 2 \quad 2{\cdot}5,$$
$$\frac{x}{\delta} = 3{\cdot}27, \quad 5{\cdot}14, \quad 7.41,$$
$$\frac{y}{\delta} = 1{\cdot}77, \quad 3{\cdot}14, \quad 4{\cdot}91,$$
$$\frac{x-d}{x} = 0.54, \quad 0{\cdot}61, \quad 0{\cdot}66.$$

In gleicher Weise zeigt sich dieser Einfluss des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$ bei der mehrfachen Überplattungsvernietung.

Für $i = 2$ findet man bei:

$$\frac{d}{\delta} = 1{\cdot}5, \quad 2 \quad 2{\cdot}5,$$
$$\frac{x}{\delta} = 5{\cdot}03, \quad 8{\cdot}28, \quad 12{\cdot}32,$$
$$\frac{x-d}{x} = 0{\cdot}7, \quad 0{\cdot}76, \quad 0{\cdot}8.$$

Fig. 22.



55) Es sind bei einer einfachen, zweiseitigen Laschennietung (s. Fig 22) der Durchmesser d eines Nietbolzens, die Entfernung x zweier benachbarter Nietenmittel einer Nietreihe und die Entfernung y der Mittellinie einer Nietreihe vom Blechrande zu bestimmen, wenn die Nietverbindung von den Kräften $P, -P$, deren Richtung senkrecht zur Nietbolzenachse steht, derart angegriffen wird, dass sie die Bleche auseinander zu ziehen und die Nietbolzen abzuscheren bestrebt sind.

A. Die Kräfte haben das Bestreben, jeden Nietbolzen in der Querschnittsfläche $2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}$ abzuscheren oder das Blech zwischen den Nieten in der Fläche $(l - n d)\delta = n\delta (x - d)$ abzureißen (n = Anzahl der Nieten einer Nietenreihe), daher die Gleichung:

$$\frac{n\pi d^2}{2} = (l - n d)\delta = n\delta (x - d) = \frac{P}{\mathfrak{S}}, \text{ woraus mit}$$

$$d = 2\delta, \quad d = \sqrt{\frac{2P}{\pi n \mathfrak{S}}} \text{ und } x = d(\pi + 1) \text{ folgt.}$$

Zur Berechnung von y benützen wir die empirische Formel $y\delta = \frac{\pi d^2}{4}$, woraus sich mit $d = 2\delta$, $y = \frac{\pi d}{2}$ und mit Beziehung auf obige viertheilige Gleichung

$$y = \frac{x - d}{2}, \quad n = \frac{l}{x} = \frac{l}{4{\cdot}14\, d},$$

oder durch P und $\mathfrak{S}$ ausgedrückt, $n = \frac{0{\cdot}092\, l^2 \mathfrak{S}}{P}$ ergibt, womit man auch $d = \frac{2P(\pi + 1)}{\pi \mathfrak{S} l}$ unabhängig von n erhält.

Untersucht man auch hier, wie sich die Tragkraft des vollen Bleches zur Tragkraft der Nietstelle verhält, so findet man auf dieselbe Weise wie in Beispiel 54: $P : P_1 = 1000 : 758$, die relative Verschwächung des Bleches durch die Nieten beträgt also circa 24%. Es heiße die Anzahl der Nietreihen, durch welche je ein Blechende mit den Laschen verbunden ist, i, so ist die Tragkraft der Nietstelle $P_1 = \frac{n i \pi d^2 \mathfrak{S}}{2}$, die Tragkraft des vollen Bleches ist: $P = l\delta\mathfrak{S} = \frac{l d \mathfrak{S}}{2}$; durch Vergleich findet man:

$$P : P_1 = 1 : \frac{1}{1 + \frac{1}{i\pi}},$$

woraus man ersieht, dass sich der Wert des vierten Gliedes dieser Proportion umsomehr der Einheit nähert, je größer i wird; für $i = 3$ würde man erhalten: $\frac{P}{P_1} = \frac{100}{90{\cdot}5}$, es würde also die Tragkraft der Nietstelle nur um $9\frac{1}{2}$% kleiner sein als die des vollen Bleches. Auch der Einfluss des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$ ist hier derselbe wie in dem in Beispiel 54 behandelten Falle; man findet:

$$\frac{x}{\delta} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} \text{ und } \frac{x - d}{x} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi}\frac{\delta}{d}},$$

woraus bezüglich des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$ dasselbe hervorgeht, was darüber in Beispiel 54 gesagt wurde.

56) Es sind bei einer mehrfachen, zweiseitigen Laschennietung die Werte d, x, y, n zu berechnen und der Einfluss des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$, sowie der Anzahl i der Nietreihen auf die Festigkeit der Nietstelle zu untersuchen; jedes Blechende ist durch i Nietreihen mit den Laschen verbunden, die Kräfte wirken ebenso wie in den in den vorigen Beispielen behandelten Fällen.

A. Aus der Gleichung

$$\frac{d^2\pi i\mathfrak{S}}{2} - \left[n(x-d) + \frac{x}{2}\right]\delta\mathfrak{S} = P \text{ ergibt sich mit } d = 2\delta:$$

$$d = \sqrt{\frac{2P}{\pi i n \mathfrak{S}}}, \quad x = \frac{2nd(\pi i+1)}{2n+1}$$

und aus der Gleichung $l - nd = n(x-d) + \frac{x}{2}$ ergibt sich $n = \frac{2l-x}{2x}$, oder mit Bezug auf die für x und d gefundenen Werte findet man auch: $n = \frac{l}{d(\pi i+1)}$ und $n = \frac{P\pi i\mathfrak{S}}{2P(\pi i+1)^2}$, womit man $d = \frac{2P(\pi i+1)}{l\mathfrak{S}\pi i}$ unabhängig von n erhält.

Der Wert von y ergibt sich wie früher aus der Gleichung $y\delta^2 = \frac{xd^2}{4}$, mit $y = \frac{xd}{4\delta}$, oder auch $y = \frac{x-d}{2}$, oder $\frac{y}{\delta} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2$. Es sei z. B. $P = 20.000\,kg$, $l = 1000\,mm$, $i = 2$, so erhält man nach den Formeln für d und n, $d = 9{\cdot}27$, $n = 14{\cdot}811$, oder abgerundet $d = 10\,mm$, $n = 15$, ferner $x = 65\,mm$; den Wert der Brüche $\frac{y}{\delta}$ und $\frac{x}{d}$ findet man auf gleiche Weise wie früher,

$$\frac{x}{\delta} = \frac{\pi d^2}{2\delta^2} = \frac{d}{\delta} \text{ und } \frac{x-d}{x} = \frac{1}{1+\frac{2\delta^2}{\pi d^2}},$$

aus welchen Gleichungen bezüglich des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$ dasselbe hervorgeht, was darüber in Beispiel 34 gesagt wurde. Die Tragkraft des vollen Nietes ist: $P = \frac{\pi d^2 i n \mathfrak{S}}{2}$, jene der Nietstelle $P_1 = \frac{\pi\delta^2 i n\mathfrak{S}}{2}$, woraus mit $\frac{\delta}{d} = \frac{1}{\varphi}$ und $\frac{P}{P_1} = \varphi^2 i + 1$ sich die Proportion ergibt:

$$P : P_1 = 1 : \frac{1}{\varphi^2 i + 1}, \text{ für } i = 3 \text{ wird } \frac{P}{P_1} = \frac{1}{0{\cdot}64}.$$

woraus also hervorgeht, dass mit dem Wachsen von i die Tragkraft des Nietes sich der des vollen Nietes immer mehr nähert. Bezüglich der Dicke δ_1 der Lasche würde es wohl genügen, $\delta_1 = \frac{\delta}{2}$ zu machen, allein der Sicherheit wegen nimmt man $\delta_1 = 0{\cdot}6\,\delta$.

Da diese Summe der als vorhanden vorausgesetzten Winkeleisen zusammengenommen ist, wird durch eine Kraft $P = 15.072\,kg$ in der Längsrichtung der von Winkeleisen des Stabes sind mit den von Winkeleisen des zu stossenden Stabes kreuzförmig überlappt (s. nebenstehende Figur 25 [Fig. 25]: es sind die Flächenschwerpunkte dieser Stäbe in eine Verbindungsstelle [illegible]

Da nun die Nietlöcher die Querschnitte und die Verbindungsplatten schwächen, so müssen diese Querschnitte verstärkt werden. Deshalb machen wir die Laschen [illegible] Diese Verstärkung kann [illegible] der Nietbolzen, [illegible] Winkeleisen und der Verbindungsplatten

an der Stelle, wo die Nieten durchgehen. Die Gesammtquerschnittsfläche der abzuscherenden Nieten ist

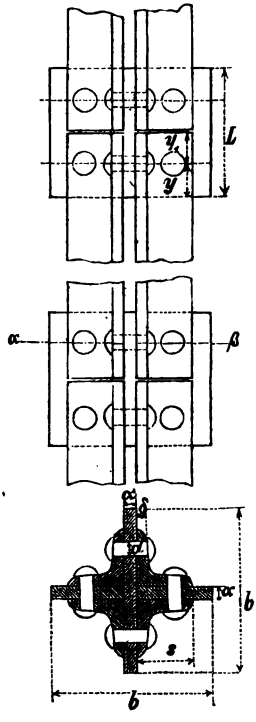
$$f = \frac{8\pi d^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{15072}{6} = 2512\ mm^2;$$

die Scherspannung $\mathfrak{S}$ setzen wir hier $= 6$, weil die Reibung zwischen den Blechen infolge des Zusammenziehens der Nieten nach dem Erkalten eine Kraft darstellt, die der Kraft P entgegen wirkt, welche Reibung wir aber außer Rechnung lassen, daher die zulässige Scherspannung gleich der zulässigen Zugspannung setzen. Aus obiger Gleichung folgt: $d = \sqrt{\frac{P}{2\pi\mathfrak{S}}} = 20\ mm$. Die Querschnittsfläche eines Winkeleisens heiße f_1, so ist $f_1 - 2d\delta = \frac{f}{4} = \frac{2512}{4} = 628\ mm^2$, und da $f_1 = 2s\delta - \delta^2$ ist, so findet man mit der im Maschinenbau allgemein üblichen Beziehung $s = 6\delta + 10\ mm$, $\delta = 8{\cdot}52 \backsim 9\ mm$ und $s = 62\ mm$. Es heiße der Gesammtquerschnitt der Verbindungsplatten f_2, so muss, wenn α die Plattendicke bezeichnet, $f_2 - 4d\alpha = 2b\alpha - 4\alpha^2 - 4\alpha d = f = 2512$ sein, woraus sich mit $\alpha = 10\ mm$ die Plattenbreite $b = 170{\cdot}6 \backsim 171\ mm$ ergibt. Die Entfernung y_1 eines Nietmittels vom Rande des Winkeleisens, in der Richtung der Länge des Winkeleisens gemessen, erhält man aus der Gleichung:

$$y_1\delta = \frac{\pi d^2}{4},\ \text{mit}\ y_1 = 34{\cdot}9 \backsim 35\ mm;$$

die Entfernung y eines Nietmittels vom Rande der Verbindungsplatte, gemessen in der Richtung der Länge der Winkeleisen, ergibt sich aus: $y\alpha = \frac{\pi d^2}{4}$, mit $y = 31{\cdot}416 \backsim 32\ mm$, somit ist die Länge L einer Platte $L = 2(32 + 35) = 134\ mm$.

Fig. 23.



II. CAPITEL.

Aufgaben aus der Lehre von der Biegungsfestigkeit.

In diesem Capitel wurde der Auflösung der Aufgaben die Grundformel der Biegungsfestigkeit „$M = \mathfrak{S}Z$“ zugrunde gelegt; hierin bedeuten: M die algebraische Summe der Biegungsmomente aller äußeren biegenden Kräfte, $\mathfrak{S}$ die zulässige Spannung, Z den Querschnittsmodul, d. i.

$$Z = \frac{J}{c} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Entfernung der äußerst gespannten oder äußerst gedrückten Faserschichte von der neutralen Faserschichte}}$$

gleich dem Querschnittsmodul des vorliegenden Querschnittes. Die Werte für M, für die verschiedenen Arten der Belastung und Einspannung (Befestigung) der auf Biegung beanspruchten Körper, sowie die Werte für J und c wurden den in den Lehrbüchern der Mechanik enthaltenen, bezüglichen Tabellen entnommen.

1) Ein prismatischer Balken aus Fichtenholz ist in horizontaler Lage an einem Ende eingemauert und am anderen Ende frei, die freie Länge ist $l = 4\,m$, der Querschnitt ist ein Rechteck von der Höhe $h = 200\,mm$ und der Breite $b = 150\,mm$. Wie groß ist die Tragkraft des Balkens bei Berücksichtigung des Eigengewichtes, *a)* wenn die Last P_1 am Ende des Balkens vertical nach abwärts wirkt und *b)* wenn die Last P_2 über der ganzen Länge des Balkens gleichmäßig vertheilt ist?

A. Ad *a)* Das Eigengewicht G des Balkens ist $G = 0{\cdot}12\,m^3 . . 470 = 56{\cdot}4\,kg$ (specifisches Gewicht des Holzes $= 0{\cdot}47$ angenommen). Aus der diesem Falle entsprechenden Festigkeitsformel

$\left(P_1 + \frac{G}{2}\right) l = \mathfrak{S} Z = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$ findet man, mit $\mathfrak{S} = 0{\cdot}75$, $P_1 = 159{\cdot}3\,kg$.

Ad *b)* Hier ergibt sich aus der Gleichung

$$(P_2 + G)\frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6} \text{ mit } \mathfrak{S} = 0{\cdot}75, \quad P_2 = 318{\cdot}6\,kg,$$

was man übrigens auch aus der für den vorliegenden Fall geltenden Beziehung $P_2 = 2\,P_1$ sofort erhalten hätte.

2) Ein prismatischer Balken aus Eichenholz von rechteckigem Querschnitte, mit der Breite $b = 150\,mm$, ist in horizontaler Lage an einem Ende eingemauert. Der Balken habe eine freie Länge von $l = 2\,m$ und ist mit $P = 250\,kg$ belastet. Welche Höhe h muss der Balken erhalten: *a)* Wenn die Last am freien Ende vertical nach abwärts wirkt, *b)* wenn die Last gleichmäßig über der ganzen Länge des Balkens vertheilt ist, *c)* wenn in beiden Fällen *a)* und *b)* das Eigengewicht des Balkens berücksichtigt wird?

A. Ad *a)* Diesem Falle entspricht die Formel $Pl = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$, hieraus findet man mit $\mathfrak{S} = 0{\cdot}8$, $h = 158\,mm$.

Ad *b)* Aus der Formel $\frac{Pl}{2} = \frac{0{\cdot}8\,b h^2}{6}$ ergibt sich $h = 112\,mm$.

Ad *c)* Dieser Fall zerfällt in zwei Unterabtheilungen: c_1) Die Last P ist am Ende des Balkens wirksam, und c_2) die Last ist über der ganzen Länge gleichmäßig vertheilt. In beiden Fällen ist das Eigengewicht des Balkens zu berücksichtigen.

Ad c_1) Aus der hier anzuwendenden Formel

$$\left(P + \frac{G}{2}\right) l = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$$

findet man, wenn man $G = l b h \gamma$ ($\gamma = 0{\cdot}7$, specifisches Gewicht des Eichenholzes) einsetzt und h bestimmt durch Auflösen der entstehenden, quadratischen Gleichung mit dem positiven Wurzelwerte: $h = 163{\cdot}54\,mm$; will man die quadratische Gleichung umgehen, so berechnet man zuerst h ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes, was bereits ad *a)* geschah. Mit dem dort gefundenen Werte von

$h = 158\,mm$ berechnet man angenähert das Gewicht $G = lbh\gamma = 33{\cdot}18$ und findet dann aus der Gleichung

$$\left(P + \frac{33{\cdot}18}{2}\right) l = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}, \text{ angenähert } h = 163{\cdot}2\,mm.$$

Ad c_2) Hier findet man aus der Gleichung $(P+G)\frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$, worin G und h bekannt sind, durch das eben genannte Annäherungsverfahren, zunächst angenähert: $h = 112$, $G = 23{\cdot}52$ und genauer $h = 116\,mm$; würde man aber $G = lbh\gamma$ einsetzen und die entstehende quadratische Gleichung auflösen, so fände man $h = 117{\cdot}15\,mm$.

3) Vier Balken aus Eichenholz sind mit je einem Ende in horizontaler Lage eingemauert, sie tragen Granitplatten von $125\,mm$ Dicke als Boden eines Balkons. Die freie Länge der Balken ist $2\,m$, die Länge des Balkons ist $3\,m$. Es sind die Abmessungen des rechteckigen Querschnittes eines Balkens zu berechnen, wenn die Breite b sich zur Höhe h wie 1 zu 3 verhält und der Balken genügend stark sein soll, um an seinem äußersten Ende eine zufällige Last von $P = 350\,kg$ zu tragen. Die Granitplatten bilden eine über die ganze Länge aller Balken gleichförmig vertheilte Last.

A. Die hier zur Querschnittsbestimmung anzuwendende Festigkeitsformel ist:

$$\left(P + \frac{G}{2}\right) l = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}, \quad b = \frac{h}{3}$$

gesetzt, das Gewicht G der Granitplatten für einen Balken

$$G = \frac{3 \,.\, 2 \,.\, 0{\cdot}125 \,.\, 1000 \,.\, 2{\cdot}7}{4} = 506{\cdot}25\,kg$$

(Dichte des Granites $= 2{\cdot}7$ angenommen), sowie die übrigen Zahlenwerte in die Festigkeitsformel eingesetzt und h bestimmt, gibt mit $\mathfrak{S} = 0{\cdot}8$, $h = 310\,mm$, daher $b = 103{\cdot}3\,mm$.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Berechnung von Zapfen.

4) Ein einer Tragachse angehörender Stirnzapfen wird von einer Kraft P, welche in der Mitte der Zapfenlänge vertical nach auf- oder abwärts wirkt, auf Biegung beansprucht; es ist der Durchmesser d und die Länge l des cylindrischen Zapfens zu berechnen.

A. Bei Berechnung der Festigkeitsdimensionen eines Zapfens hat man nicht nur dafür zu sorgen, dass er genügend fest sei, sondern auch, dass seine Abnützung infolge der Reibung möglichst klein sei. Die Festigkeitsdimensionen findet man aus den Gleichungen:

$$\frac{Pl}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{32} \text{ und } \frac{l}{d} = \varphi, \text{ hieraus ist } d = 2{\cdot}26\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}}.$$

Das Verhältnis φ ist so zu wählen, dass die Abnützung des Zapfens durch Reibung und der Effectverlust durch letztere möglichst klein werden. Dieses wird dann der Fall sein, wenn der Flächendruck p (Druck auf die Flächeneinheit) $p = \frac{P}{ld}$ durch die Vergrößerung von l und d möglichst verkleinert wird; durch die Vergrößerung von d wird allerdings das Reibungsmoment, also der Effectverlust, ver-

größert, jedoch nur sehr unbedeutend, durch Vergrößerung von l allein würde die Festigkeit verringert, man muss daher zur Verminderung der Abnützung l und d zugleich vergrößern. In die Gleichung für p den Wert von P aus der obigen Festigkeitsgleichung eingesetzt, gibt: $p = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16} \cdot \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2$, woraus hervorgeht, dass der Flächendruck p, also auch die Abnützung durch Verringerung der Spannung $\mathfrak{S}$ (erzielt durch Vergrößerung von d) und durch Vergrößerung von φ herabgezogen werden kann. Die Größe φ ist jedoch ein Erfahrungswert, und zwar für schmiedeiserne Stirnzapfen, in Metallschalen laufend, bei 100 oder weniger Umdrehungen pro Minute $\varphi = 1{\cdot}5$, für einen gusseisernen Stirnzapfen, in Metallschalen laufend, $\varphi = \frac{4}{3}$, für einen Schmiedeisenzapfen, in Gusseisen laufend, $\varphi = 1{\cdot}75$; für einen Gusseisenzapfen, in Metallschalen laufend, bei $u < 150$, $\frac{l}{d} = 1{\cdot}78$, für $u > 150$, $\frac{l}{d} = 0{\cdot}15\sqrt{u}$.

Die Vergrößerung der Auflagefläche F des Zapfens zum Zwecke der Verminderung der Abnützung kann jedoch auf eine zweifache Art geschehen, entweder dadurch, dass man l und d auf l_1 und d_1 so vergrößert, dass $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l}{d}$ ist, wodurch, wie die Rechnung zeigt, die Spannung im neuen Zapfen sovielmal kleiner ist, als die Auflagefläche desselben vergrößert wurde, oder man vergrößert l und d so auf l_1 und d_1, dass $\frac{l_1}{d_1} > \frac{l}{d}$ und die Spannung im neuen Zapfen ebenso groß ist als im alten; im ersteren Falle ist $l_1 = l\sqrt{\alpha}$ und $d_1 = d\sqrt{\alpha}$, im letzteren Falle ist $l_1 = l\sqrt[4]{\alpha^3}$, $d_1 = d\sqrt[4]{\alpha}$, wenn α die Zahl bedeutet, welche anzeigt, wie vielmal die Auflagefläche des neuen Zapfens größer sein soll als die des alten; die zweite Art ist vorzuziehen, weil bei derselben infolge des kleiner ausfallenden d_1 das Reibungsmoment kleiner ist. Kennt man für einen Stirnzapfen eines Materials das Verhältnis $\varphi = \frac{l}{d}$, so kann man für einen anderen, gleich langen und gleich belasteten Stirnzapfen eines anderen Materials das Verhältnis $\varphi_1 = \frac{l}{d_1}$ durch die Gleichung finden: $\varphi_1 = \varphi\sqrt[2]{\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}}}$. Soll jedoch auch die Länge l_1 des zweiten Zapfens verschieden sein von der des ersten, so ist

$$\varphi_1 = \varphi\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}}\left(\frac{l_1}{l}\right)^2},$$

wobei $\mathfrak{S}_1$ die im zweiten Zapfen herrschende Spannung ist. Zur Berechnung von d_1 hat man $d_1 = d\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} \cdot \frac{l_1}{l}}$; will man daher bei einem Zapfen aus irgend einem Grunde die Länge l verändern

in l_1, so muss man auch, wenn die Festigkeit dieselbe bleiben soll, d verändern in d_1, und zwar nehme man

$d_1 = d\sqrt[3]{\frac{l_1}{l}}$. In die Formel $d = 2{\cdot}26\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}}$, $\varphi = 1{\cdot}5$ und $\mathfrak{S} = 6$ eingesetzt, erhält man für den Durchmesser des schmiedeisernen Stirnzapfens: $d_s = 1{\cdot}13\sqrt{P}$, für den gusseisernen mit $\varphi\frac{4}{3}$ und $\mathfrak{S} = 3$, $d_g = 1{\cdot}5\sqrt{P}$; für schwingende Zapfen nehme man: für Schmiedeisen $\mathfrak{S} = 7{\cdot}5$, für Gusseisen $\mathfrak{S} = 3{\cdot}75$ und $\varphi = \frac{4}{3}$ bis $\frac{1}{2}$, für $\varphi = 1$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ erhält man:

Für den schmiedeisernen schwingenden Zapfen $d_s = 0{\cdot}82\sqrt{P}$, $0{\cdot}71\sqrt{P}$, $0{\cdot}58\sqrt{P}$,

für den gusseisernen schwingenden Zapfen $d_g = 1{\cdot}16\sqrt{P}$, $\sqrt{P}$, $0{\cdot}82\sqrt{P}$.

5) Ein einer horizontal liegenden Achse angehörender, gusseiserner, hohler Stirnzapfen wird von einer Kraft P, welche in der Mitte der Zapfenlänge vertical nach abwärts wirkt, auf Biegung beansprucht; es ist der äußere Durchmesser d_0, der innere Durchmesser d_1 und die Länge l_0 des Zapfens zu berechnen.

A. In die Grundformel „$M = \mathfrak{S}Z$“ für M und Z die Werte eingesetzt:

$\frac{Pl_0}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0}\right)$, mit $\frac{l_0}{d_0} = \varphi$ und $\frac{d_1}{d} = \psi$, ergibt sich:

$d_0 = 2{\cdot}26\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}(1-\psi^4)}}$, bezüglich des Verhältnisses φ gilt hier dasselbe, was früher darüber im vorigen Beispiel gesagt wurde. Das Verhältnis ψ ist so zu wählen, dass eine passende, praktische Wandstärke erzielt wird. Man nehme für gewöhnliche Fälle $\psi = 0{\cdot}6$. Ein anderes, bequemes Verfahren, die Dimensionen eines hohlen Zapfens zu bestimmen, besteht darin, dass man den äußeren Durchmesser d_0 auf den Durchmesser d eines dem hohlen Zapfen gleichwertigen, massiven Zapfens bezieht, d. h. auf einen Zapfen, der ebenso belastet ist wie der hohle und dieselbe Tragkraft hat wie dieser; für den Fall, dass der massive und hohle Zapfen gleich lang sind, hat man: $d_0 = \frac{d}{\sqrt[3]{1-\psi^4}}$; so ergibt sich z. B. nach dieser Formel für verschiedene Werte von

$\psi =$	0·8,	0·75,	0·7,	0·6,	0·5,	0·4,	0·3,	0·2
$\frac{d_0}{d} =$	1·19,	1·13,	1·1,	1·05,	1·02,	1·01,	1·003,	1·0004.

Es werde z. B. der hohle Gusszapfen mit $P = 2500\,kg$ belastet, so erhält man den Durchmesser d des demselben gleichwertigen, massiven, gusseisernen Stirnzapfens: $d = 1{\cdot}5\sqrt{P} = 1{\cdot}5\sqrt{2500} = 75\,mm$; mit $\psi = 0{\cdot}6$ erhält man nach der letzten Tabelle $d_0 = 1{\cdot}05\,d = 1{\cdot}05 \,.\, 75 \backsim 79\,mm$, und $d_1 = \psi d_0 = 0{\cdot}6 \,.\, 79$, oder abgerundet $d_1 = 48\,mm$; daher die Länge des hohlen Zapfens

$l_0 = \frac{4}{3}\, d = \frac{4}{3} \cdot 75 = 100\,mm$. Soll jedoch $\varphi = \frac{l}{d} = \frac{l_0}{d_0}$ sein, so ist $d_0 = \frac{d}{\sqrt{1-\psi^4}}$, womit man im vorliegenden Falle mit $\psi = 0{\cdot}6$, $d_0 = 80{\cdot}38\,mm$ und $l_0 = \frac{4}{3}\, d_0 = 107{\cdot}17\,mm$ erhält.

6) Ein Gabel- oder Bolzenzapfen vom Durchmesser d_1 (s. Fig. 24 u. 25) und der Länge l_1 ist durch die Kraft P auf Biegung beansprucht; es sind die Dimensionen d_1 und l_1 zu berechnen.

A. Der Gabel- oder Bolzenzapfen ist als ein an seinen beiden Enden eingeklemmter, horizontal liegender Balken von prismatischem

Fig. 24.

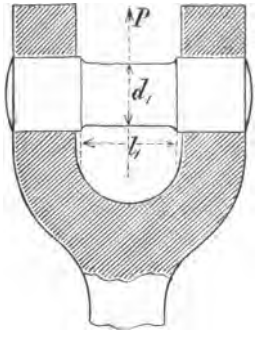
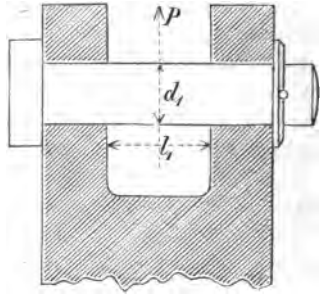


Fig. 25.



Querschnitte zu betrachten, daher die zur Querschnittsbestimmung anzuwendende Formel:

$$\frac{P l_1}{8} = \frac{\mathfrak{S}\pi d_1^3}{32}, \text{ woraus mit } \frac{l_1}{d_1} = \varphi,\ d_1 = 1{\cdot}129 \sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}}$$

folgt. Bezieht man jedoch den Durchmesser d_1 auf den Durchmesser d eines aus demselben Material gefertigten und dem Gabelzapfen gleichwertigen Stirnzapfens, so zeigt die Rechnung: $d_1 = 0{\cdot}5\, d$; hierbei ist $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l}{d}$; will man aber aus irgend einem Grunde $d_1 > 0{\cdot}5\, d$ machen, so nehme man l_1 auch größer, und zwar nach der Formel: $l_1 = 4l\left(\frac{d_1}{d}\right)^3$. Es empfiehlt sich, die Länge l_1 aus der Gleichung $l\, d = l_1\, d_1$ zu bestimmen; hiermit ergibt sich aus den für die beiden Zapfen geltenden Festigkeitsgleichungen

$$d_1 = 0{\cdot}707\, d \text{ und } l_1 = 1{\cdot}414\, l.$$

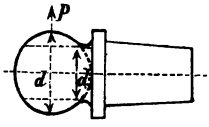
Anmerkung. Wenn ein Tragzapfen Halszapfen ist, so geschieht seine Berechnung je nach seiner Beanspruchung, entweder nach der Lehre der Torsions- oder Biegungsfestigkeit, oder nach der zusammengesetzten Festigkeit.

7) Es ist der Durchmesser d der Kugel eines Kugelzapfens zu berechnen, der durch die Kraft P auf Biegung beansprucht wird.

A. Ein Kugelzapfen (s. Fig. 26) ist ein Stirnzapfen, der anstatt einer cylindrischen Fläche eine Kugelfläche zur Mantelfläche hat. Seine Berechnung hat wie bei einem cylindrischen Stirnzapfen zu

geschehen. Ist der Kugelzapfen aus Schmiedeisen, so ist der Durchmesser d_1 des dem letzteren gleichwertigen, cylindrischen, schmiedeisernen Stirnzapfens: $d_1 = 1{\cdot}13\sqrt{P}$, $l_1 = \frac{3}{2}\, d_1$;

Fig. 26.



der Kugelzapfen erhält an der Wurzel auch die Stärke d_1 und da der Kugelform wegen $l_1 = d$ wird, so folgt: $d = 1{\cdot}695\sqrt{P}$ und allgemein: $d = 2{\cdot}26\sqrt{\frac{P\varphi^3}{\mathfrak{S}}}$, wobei $\varphi = \frac{d}{d_1}$ als bekannt zu betrachten ist.

8) Es ist der Durchmesser d einer cylindrischen, gusseisernen, horizontalen, nicht auf Verdrehung beanspruchten Welle zu berechnen, deren Zapfenlager $6\,m$ von einander entfernt sind und die $2\,m$ von dem einen Ende ein $600\,kg$ schweres Rad zu tragen hat. Das eigene Gewicht der Welle soll berücksichtigt werden.

A. Wir bestimmen zunächst einen angenäherten Wert von d ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes. Die Welle stellt einen an den Endpunkten unterstützten und zwischen denselben belasteten, horizontal liegenden Balken dar: man hat daher hier die Festigkeitsgleichung: $\frac{P(l-a)a}{l} = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{32}$ (s. Fig. 27), woraus — die Zahlenwerte eingesetzt — mit $\mathfrak{S} = 2{\cdot}5$, $d = 148\,mm$ folgt; hiermit wird das Gewicht der Welle angenähert: $G = 753{\cdot}5\,kg$. Mit diesem Werte von G erhält man aus der das Eigengewicht berücksichtigenden Festigkeitsformel:

$$\left(\frac{l-b}{l}\right)\left(Pa + \frac{Gb}{2}\right) = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{32} \text{ (s. Fig. 28)}, \quad d = 172\,mm.$$

Die Entfernung b bedeutet die Entfernung des Angriffspunktes der Resultierenden R der beiden Kräfte P und G von dem einen Unter-

Fig. 27.

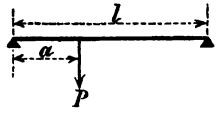
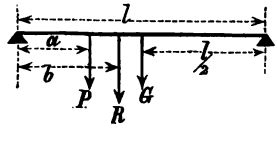


Fig. 28.



stützungspunkte und bestimmt sich aus dem Satze: Das statische Moment der Resultierenden ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte, also aus:

$$Rb = Pa + \frac{Gl}{2}, \text{ man findet hier } b = 2556{\cdot}7\,mm.$$

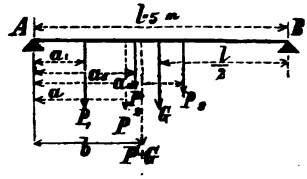
Will man den Wert von d noch genauer, so berechnet man mit $d = 172$ nochmals das Gewicht der Welle, die Größe b und aus der Festigkeitsgleichung den Wert von d.

9) An einer hohlen, cylindrischen, nicht auf Verdrehung beanspruchten Welle aus Gusseisen, welche in zwei Punkten gelagert ist, wirken die Lasten: $P_1 = 500\,kg$, $P_2 = 400\,kg$, $P_3 = 300\,kg$, in den Entfernungen $a_1 = 1\,m$, $a_2 = 2\,m$, $a_3 = 3\,m$ von dem einen Unterstützungspunkte; die Entfernung der zwei Unterstützungspunkte

ist $l = 5\,m$ (s. Fig. 29); es ist der äußere Durchmesser d_0 und der innere Durchmesser d_1 der Welle zu berechnen, wenn das Gewicht der Welle berücksichtigt werden soll.

A. Wir berechnen wieder zunächst angenäherte Werte von d_0 und d_1 ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes der Welle. Man findet aus der hier anzuwendenden Festigkeitsformel

Fig. 29.



$$\frac{P(l-a)a}{l} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0}\right),$$

in welcher P die Resultante der gegebenen Kräfte und a die Entfernung ihres Angriffspunktes von dem Unterstützungspunkte A ist,

mit $\frac{d_1}{d_0} = 0{\cdot}6$ und $\mathfrak{S} = 2{\cdot}5$, $d_0 = \sqrt[3]{\frac{P(l-a)a}{0{\cdot}22\,l}} = 185\,mm$,

$d_1 = 0{\cdot}6\,d_0 = 111\,mm$, hierbei ist $P = 1200\,kg$, $a = 1833{\cdot}3\,mm$; mit dem aus diesen angenäherten Werten d_0 und d_1 berechneten angenäherten Gewicht der Welle findet man auf dieselbe Weise wie bei der vorigen Aufgabe $d_0 = 194\,mm$, $d_1 = 116{\cdot}4\,mm$.

10) Eine schmiedeiserne, nicht auf Verdrehung beanspruchte Welle von $4\,m$ Länge und quadratischem Querschnitte ist an ihren Enden gelagert und in den Entfernungen von $a_1 = \frac{1}{2}\,m$, $a_2 = 1\,m$, $a_3 = 2\,m$, $a_4 = 3\,m$ von dem einen Ende mit $P_1 = 600\,kg$, $P_2 = 1500\,kg$, $P_3 = 900\,kg$, $P_4 = 2000\,kg$ belastet (s. Fig. 30); wie groß ist die

Fig. 30.

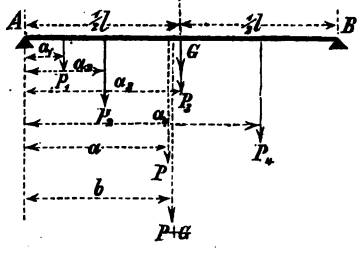
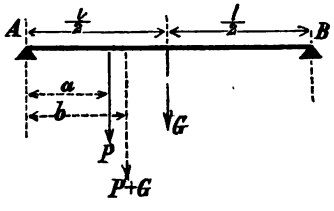


Fig. 31.



Quadratseite s des Querschnittes zu machen, *a)* wenn man das Gewicht der Welle nicht berücksichtigt, *b)* wenn man es berücksichtigt? Resultat:

ad *a)* $s = 171\,mm$,

ad *b)* $s = 175{\cdot}5\,mm$.

(Die Auflösung bleibe dem Fleiße des Lesers überlassen.)

11) Eine Welle aus Fichtenholz von $6{\cdot}277\,m$ Länge ist in ihren beiden Enden gelagert, sie hat einen kreisförmigen Querschnitt von $314\,mm$ Durchmesser und soll $2511\,mm$ von dem einen Ende entfernt ein Wasserrad tragen; welches Gewicht P darf dasselbe haben, wenn man das Gewicht der Welle berücksichtigt und dieselbe nicht auf Torsion beansprucht wird? (S. Fig. 31.)

A. In der diesem Falle entsprechenden Festigkeitsgleichung

$$\left(\frac{l-b}{l}\right)\left(Pa+\frac{Gb}{2}\right)=\frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{32}$$

sind P und b unbekannt, das Eigengewicht G lässt sich aus den Daten der Aufgabe berechnen. Setzt man den Wert von b aus der Gleichung „$(P+G)b=Pa+\frac{Gl^a}{2}$ in obige Festigkeitsgleichung ein, so ergibt sich eine gemischte, cubische Gleichung in Bezug der Unbekannten P; um diese zu umgehen, berechnen wir zunächst P ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes aus der Gleichung $\frac{P(l-a)a}{l}=$ $=\frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{32}$ und erhalten $P=1377\,kg$, hiermit wird $b=2627{\cdot}82\,mm$; mit diesem Werte erhält man aus der das Eigengewicht berücksichtigenden Festigkeitsformel unter der Annahme $\mathfrak{S}=0{\cdot}683$, dem specifischen Gewichte des Fichtenholzes $\gamma=0{\cdot}64$ und dem Gewichte $G=\frac{d^2\pi}{4}l\gamma=315\,kg$, $P=1257{\cdot}173\,kg$. Wird ein sehr genauer Gang gewünscht, so berechnet man P aus der Formel für die Durchbiegung

$$s=\frac{P}{3EJ}\cdot\frac{(l-a)^2a^2}{l},$$

den Elasticitätsmodul für Fichtenholz, $E=1096$ angenommen, erhält man bei der Annahme $s=0{\cdot}001\,l$, $Q=690\,kg$.

12) Welche Größe kann die über die ganze Welle gleichmäßig vertheilte Last G erhalten, wenn die in der vorigen Aufgabe gegebenen Daten beibehalten werden, und zwar *a)* ohne, *b)* mit Berücksichtigung des Eigengewichtes, *c)* wenn eine Durchbiegung $s=0{\cdot}001\,l$ gestattet ist?

A. Ad *a)* Für diesen Fall findet man aus der Gleichung „$\frac{Gl}{8}=\frac{\mathfrak{S}\pi d^{3a}}{32}$, $G=2622{\cdot}5\,kg$.

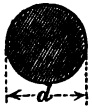
Ad *b)* Hier hat man aus der Gleichung „$(G+315)\frac{l}{8}=\frac{\mathfrak{S}\pi d^{3a}}{32}$, $G=2307{\cdot}5\,kg$. Das Eigengewicht von $315\,kg$ muss hier zur gleichförmig vertheilten Last G zugezählt werden.

Ad *c)* Aus der hier zu benützenden Gleichung

$$s=\frac{5l^3(G+315)}{384EJ}=0{\cdot}001\,l$$ erhält man $G=703{\cdot}14\,kg$.

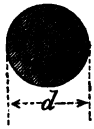
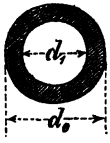
13) In der Mitte einer liegenden, horizontalen Achse, die an ihren Enden unterstützt ist und die Länge l hat, wirke eine Last von Pkg. Es sollen allgemeine Formeln zur Berechnung solcher Achsen ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes derselben aufgestellt werden, wenn der Querschnitt der Achse kreisförmig, quadratisch oder ringförmig, das Material für die beiden ersten Querschnitte Schmiedeisen, Gusseisen, Holz, für letzteren Querschnitt jedoch nur Gusseisen ist.

A. In der folgenden Tabelle sind die Resultate dieser Aufgabe zusammengestellt (s. Fig. 32, 33, 34).

Form des Achsen-Querschnittes	Material der Achse		
	Schmiedeisen	Gusseisen	Holz
Fig. 32. 	$d = 0{\cdot}752 \sqrt[3]{Pl}$	$d = 1{\cdot}006 \sqrt[3]{Pl}$	$d = 1{\cdot}72 \sqrt[3]{Pl}$
Fig. 33.	$a = 0{\cdot}63 \sqrt[3]{Pl}$	$a = 0{\cdot}843 \sqrt[3]{Pl}$	$a = 1{\cdot}442 \sqrt[3]{Pl}$
Fig. 34.		$d_2 = 1{\cdot}006 \sqrt[3]{\frac{Pl}{1-\psi^4}}$ $d_1 = d_2 \psi$	

14) In der Mitte einer horizontal liegenden Achse, die an ihren Enden unterstützt ist und die Länge l hat, wirke eine Last von $P kg$; es sollen allgemeine, einfache Formeln zur Berechnung solcher Achsen entwickelt werden, wenn von der erlaubten Durchbiegung ausgegangen und diese gleich dem tausendsten Theil der Länge der Achse, also $s = 0{\cdot}001\, l$ genommen wird. Die Achsen sind prismatisch, aus Schmiedeisen, Gusseisen und Eichenholz, von kreisförmigem, quadratischem und kreisringförmigem Querschnitte, das Eigengewicht der Achsen soll nicht berücksichtigt werden. Unter Zugrundelegung der Formel „$0{\cdot}001\, l = \frac{Pl^3}{48\, EJ}$“ wurden die in der Tabelle Seite 41 niedergelegten Resultate berechnet.

In der vorstehenden Tabelle sind außer den Querschnittsdimensionen der Achsen auch noch die in denselben auftretenden Faserspannungen $\mathfrak{S}$ für die verschiedenen Querschnitte und Materialien ersichtlich; ferner geben die für den Quotienten $\frac{l^2}{P}$, beziehungsweise $(1 - \psi^4)\frac{l^2}{P}$ ausgerechneten Zahlenwerte die Bedingung an, unter welchen die Querschnittsberechnung der Achsen auf Grund der gestatteten Durchbiegung dieselben Werte liefert wie die Berechnung aus dem Widerstandsmomente. Ergibt sich der Wert $\frac{l^2}{P}$ größer oder kleiner als der in der Tabelle enthaltene Zahlenwert, so liefert

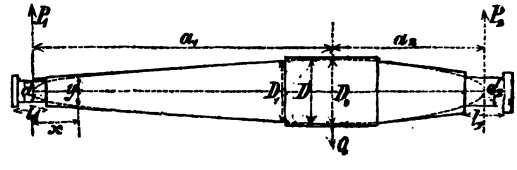
Form des Achsen-Querschnittes	Material der Achse		
	Schmiedeisen	Gusseisen	Eichenholz
Fig. 35. 	$d = 0{\cdot}382 \sqrt{l} \sqrt[4]{P}$	$d = 0{\cdot}46 \sqrt{l} \sqrt[4]{P}$	$d = 0{\cdot}772 \sqrt{l} \sqrt[4]{P}$
Fig. 36.	$a = 0{\cdot}3344 \sqrt{l} \sqrt[4]{P}$	$a = 0{\cdot}398 \sqrt{l} \sqrt[4]{P}$	$a = 0{\cdot}675 \sqrt{l} \sqrt[4]{P}$
Fig. 37. 		$d_0 = 0{\cdot}46 \sqrt{l} \sqrt[4]{\frac{P}{1-\psi^4}}$ $d_1 = d_0 \psi$	
$\mathfrak{S}_{\bullet} =$	$45{\cdot}801 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$	$27{\cdot}2364 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$	$5{\cdot}553 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$
$\mathfrak{S}_{\blacksquare} =$	$40{\cdot}15 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$	$23{\cdot}8578 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$	$4{\cdot}8642 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$
$\mathfrak{S}_{\circ} =$		$27{\cdot}2364 \sqrt[4]{\frac{P}{(1-\psi^4) l^2}}$	
$\frac{l^4}{P} \geqq$	3397·028	14.073·93	15.234·61
$\frac{l^2}{P} \geqq$	2000	8286·445	8957·95
$\frac{l^2}{P} \geqq$		$\frac{(1-\psi^4) l^2}{P} \geqq 14.073{\cdot}93$	

die Querschnittsberechnung auf Grund der Durchbiegung einen größeren oder kleineren Wert als die aus dem Widerstandsmomente berechnete Querschnittsdimension. Es wäre z. B. bei einer schmiedeisernen Achse mit Kreisquerschnitt $l = 2\,m$, $P = 5000\,kg$, dies gibt $\frac{l^3}{P} = 800$, da aber für diesen Fall laut Tabelle $\frac{l^3}{P} \leqq 3397{\cdot}028$ sein muss, so folgt daraus, dass in diesem speciellen Falle die Berechnung nicht auf Grund der Durchbiegung, sondern aus dem Widerstandsmomente $\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S}J}{c}$ zu geschehen habe; wäre aber $P = 2000\,kg$, dann ist $\frac{l^3}{P} = 2000$; denselben Wert zeigt aber auch die Tabelle für die schmiedeiserne Achse von quadratischem Querschnitte, daher erhält man hier nach beiden Berechnungsarten denselben Wert der Quadratseite des Querschnittes, nämlich $a = 100\,mm$.

Berechnung der Tragachsen von der Form der gleichen Festigkeit.

15) Es ist eine schmiedeiserne, einfach tragende Achse von kreisförmigem Querschnitte zu berechnen, welche in ihren Enden gelagert ist und in der Entfernung $a_1 = 800\,mm$ von dem einen Zapfenmittel ein $1500\,kg$ schweres Rad zu tragen hat. Die Länge der Achse zwischen beiden Zapfenmitteln ist $l = 1200\,mm$, die Achse soll die Form der gleichen Festigkeit haben (s. Fig. 38).

Fig. 38.



A. Die Last Q in zwei parallele Componenten P_1 und P_2 zerlegt, welche in den Zapfenmitteln angreifen, so stellen diese Componenten die Zapfendrücke dar, welche durch die nach aufwärts wirkenden Lagerreactionen im Gleichgewichte erhalten werden. Aus der Momentengleichung $P_1 l = Q(l - a_1) = Q a_2$ und der Gleichung $P_1 + P_2 = Q$ folgt: $P_1 = \frac{Q a_2}{l}$, $P_2 = \frac{Q a_1}{l}$, für den Querschnitt vom Durchmesser D_0 im Angriffspunkte der Last hat man: $P_1 a_1 = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} D_0^3$, für den Querschnitt vom Durchmesser y in der Entfernung x von dem einen Zapfenmittel ist $P_1 x = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} y^3$. Da die Achse wegen ihrer Form der gleichen Festigkeit in allen ihren Querschnitten die gleiche Festigkeit, also auch dieselbe Spannung $\mathfrak{S}$ haben soll, so folgt aus der Gleichsetzung der Werte von $\mathfrak{S}$ aus den letzten zwei Gleichungen: $y^3 = \frac{x D_0^3}{a_1}$, dies ist aber die Gleichung einer cubischen Parabel, daher die theoretische Form der Achse vom Angriffspunkte der Last nach beiden Zapfenmitteln hin nach der cubischen Parabel als Form der gleichen Festigkeit zu bilden ist. Zur Berechnung der Zapfen-

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

durchmesser d_1 und d_2 und deren Längen l_1 und l_2 hat man aus den Gleichungen: $\frac{P_1 l_1}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} d_1^3$ und $\frac{P_2 l_2}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} d_2^3$, $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l_2}{d_2} = 1{\cdot}5$, mit $\mathfrak{S} = 6$: $d_1 = 1{\cdot}13\sqrt{P_1} = 1{\cdot}13\sqrt{500} = 25\,mm$, $l_1 = 38\,mm$, $d_2 = 1{\cdot}13 . \sqrt{P_2} = 1{\cdot}13\sqrt{1000} = 36\,mm$ und $l_2 = 54\,mm$. Der Durchmesser D_0 des Achsenkopfes im Angriffspunkte der Last ergibt sich aus der Gleichung $P_1 a_1 = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} D_0^3$ mit $D_0 = 87\,mm$. Wegen der auf dem Achsenkopfe anzubringenden Keilnuten zur Befestigung des Rades vergrößern wir aber diesen Wert und nehmen den Durchmesser des cylindrischen Achsenkopfes $D = 96\,mm$. Für einen beliebigen Durchmesser y in der Entfernung x von dem einen Zapfenmittel hat man übrigens auch für den linken Achsenschenkel: $y = d_1 \sqrt[3]{\frac{2x}{l_1}}$ und für den rechten Achsenschenkel: $y = d_2 \sqrt[3]{\frac{2x}{l_2}}$, mittelst welcher Formeln man eine beliebige Anzahl Durchmesser der Achse finden und darnach die beiden cubischen Parabeln verzeichnen kann.

16) Es ist eine gleichschenklige Balancierachse aus Gusstahl mit einer Achsenkopfbelastung von $Q = 12.000\,kg$ und einer Länge $2a = 800\,mm$ zwischen beiden Zapfenmitteln zu berechnen.

A. Wegen der gleichen Schenkellängen sind auch die Zapfendrücke und Zapfendurchmesser einander gleich, nämlich

$$d = 2{\cdot}26\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}}, \text{ mit } \frac{l}{d} = \varphi = 1{\cdot}75 \text{ und } \mathfrak{S} = 10,$$

erhält man $d = 75\,mm$, die Länge l nehmen wir hier, weil die Achse nur schwingt, $l = 1{\cdot}4\,d = 1{\cdot}4 . 75 = 100\,mm$. Der theoretische Durchmesser D_0 des Achskopfes wird:

$$D_0 = d\sqrt[3]{\frac{2a}{l}} = 75\sqrt[3]{\frac{800}{100}} = 150.$$

Die Nabe des Balanciers sei $320\,mm$ lang, wir nehmen daher die Länge des Achskopfes $L = 350\,mm$. Die Schenkeldicke D' an den Enden des Achskopfes ergibt sich, wenn man in der Formel

$$y = d\sqrt[3]{\frac{2x}{l}}, \text{ für } x \text{ den Wert } x = a - \frac{L}{2}$$

einsetzt, man erhält dann: $D' = 125\,mm$. Die Dicke D'' des Achsschenkels an der Zapfenwurzel, also da, wo der Zapfen in den Achsschenkel übergeht, erhält man, wenn man zum Zapfendurchmesser d die doppelte Anlaufhöhe s des Zapfens, $s = 3 + 0{\cdot}07\,d = 8{\cdot}25$, zuzählt, man erhält dadurch $D'' = 92\,mm$, wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass die die Profilform der Achse bildende, cubische Parabel von der geradlinigen Begrenzung der Kegelstümpfe tangiert wird.

17) Es ist für ein gleichschenkeliges Kunstkreuz, dessen Schenkel je einer mit $Q_1 = 2000\,kg$ normal zur Schenkellänge belastet wird, die schmiedeiserne gleichschenkelige Achse zu berechnen, wenn die

Nabenlänge des Kunstkreuzes $L = 280\,mm$, die Entfernung der Lagermittel der Achse $2a = 500\,mm$ ist und die Schwerpunktsebene des Kunstkreuzes in die Mitte der Achse fällt.

A. Die Figuren 39 und 40 zeigen Kunstkreuz und Achse linear dargestellt. Bei B greift das Pumpengestänge und bei A die nach dem Motor gehende Zugstange an. Der Normaldruck Q auf die Achse ist $Q = \sqrt{2\,Q_1^2} = 2800\,kg$; die beiden hier gleichen Zapfen erhalten einen Durchmesser $d = 2{\cdot}26\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}}$, woraus mit

Fig. 39.

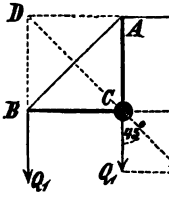
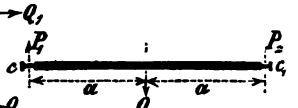


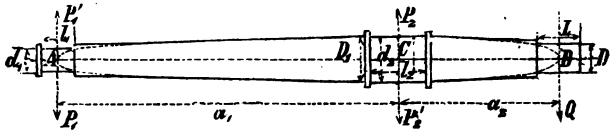
Fig. 40.



$\mathfrak{S} = 6$, $P = \frac{Q}{2} = 1400$ und $\varphi = 1{\cdot}75$, $d = 45\,mm$ folgt. Achskopf und Schenkel werden hier von durchaus gleicher Dicke cylindrisch gemacht mit einem Durchmesser von $D_0 = d\sqrt[3]{\frac{2a}{l}}$, woraus mit $l = 1{\cdot}25\,d$ (wegen der hier stattfindenden schwingenden Bewegung) $D_0 = 85\,mm$ gefunden wird.

18) Eine freitragende, massive, schmiedeiserne Achse mit einer Achskopfbelastung $Q = 800\,kg$ ist nach folgenden Angaben zu berechnen: Die Entfernung der beiden Lagermittel (s. Fig. 41) ist

Fig. 41.



$a_1 = 1000\,mm$, die Entfernung zwischen Achskopfmitte und Halszapfenmitte ist $a_2 = 400\,mm$, die Länge des Achskopfes ist $L = 120\,mm$.

A. Aus dem Zapfendruck $P_1 = \frac{Q a_2}{a_1} = 320\,kg$ und der Formel $d_1 = 1{\cdot}13\sqrt{P_1}$ ergibt sich der Durchmesser d_1 des Stirnzapfens, $d_1 = 20\,mm$ und dessen Länge $l_1 = 1{\cdot}5\,d_1 = 30\,mm$. Den Durchmesser d_2 des Halszapfens findet man aus:

$$d_2 = d_1\sqrt[3]{\frac{2a_1}{l_1}} = 80\,mm,\quad l_2 = 1{\cdot}5\,d_2 = 120\,mm.$$

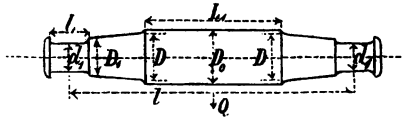
Der Durchmesser D des wie ein Stirnzapfen zu berechnenden Achskopfes ist entweder aus der Gleichung $\frac{QL}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}D^3$, oder mittelst der Zapfenformel $d_q = 1{\cdot}13\sqrt{Q}$ zu berechnen. Da aber das dieser Formel zugrunde liegende Verhältnis $\varphi = \frac{L}{d_q} = 1{\cdot}5$ hier im allgemeinen nicht eingehalten sein wird, so folgt nach dem früher bei der Zapfenberechnung Gesagten aus der Gleichung

$\frac{d_q^3}{l_q} = \frac{D^{3a}}{L}$, $D = d_q \sqrt[3]{\frac{L}{l_q}}$, da $d_q = 1{\cdot}13\sqrt{800} = 32\,mm$ und $l_q = 1{\cdot}5\,d_q = 48\,mm$ ist, so erhält man $D = 44\,mm$.

19) Es ist eine schmiedeiserne Achse mit zwei Tragpunkten (s. Fig. 42) für die Belastungen $Q_1 = 3500\,kg$, $Q_2 = 4200\,kg$ zu berechnen, die Schenkellängen sind: $a_1 = 700\,mm$, $a_2 = 400\,mm$, die Schaftlänge $s = 1700\,mm$.

A. Die Resultierende der gegebenen Kräfte Q_1 und Q_2 in zwei parallele Componenten zerlegt, die durch die Lagerreactionen P_1 und P_2 im Gleichgewicht erhalten werden, erhält man aus der für den Punkt B als festen Punkt geltenden Momentengleichung $P_1(a_1 + s + a_2) - Q_1(s + a_2) - Q_2 a_2 = 0$ und aus: $P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2$, die Lagerdrücke $P_1 = 3225\,kg$ und $P_2 = 4475\,kg$, hiermit erhält man die Zapfendimensionen $d_1 = 1{\cdot}13\sqrt{P_1} = 64$, $l_1 = 1{\cdot}5\,d_1 = 96$, $d_2 = 1{\cdot}13\sqrt{P_2} = 76$ und $l_2 = 114\,mm$. Der Durchmesser des linken Achskopfes ist $D_1 = d_1 \sqrt[3]{\frac{2a_1}{l_1}} = 156$, für die Entfernungen $x_1 = 175$, $x_2 = 350$, $x_3 = 525$, vom linken Zapfenmittel erhält man die zugehörigen Durchmesser des linken Achsenschenkels nach der Formel:

Fig. 42.



$y_1 = d_1 \sqrt[3]{\frac{2x_1}{l_1}}$, $y_1 = 98$, $y_2 = 124$, $y_3 = 142$; in gleicher Weise für den rechten Schenkel: Für die Entfernungen $x_1' = 100$, $x_2' = 200$, $x_3' = 300$, $x_4' = a_2 = 400$ vom rechten Zapfenmittel: $y_1' = 91$, $y_2' = 115$, $y_3' = 132$, $D_2 = 145$. Die Werte D_1 und D_2 werden etwas größer genommen als hier ausgerechnet wurde, damit man gegen die angrenzenden Theile der Achse noch einen Anlauf hat, welcher das Aufbringen der Naben der die Achse belastenden Maschinentheile, sowie das Einbringen der Keilbahnen erleichtert. Die verschiedenen Durchmesser im Schafte y_1, y_2, y_3 ... in den Entfernungen x_1, x_2, x_3 ... vom Achskopf C, dessen Durchmesser D_1 ist, findet man aus den zwei Gleichungen

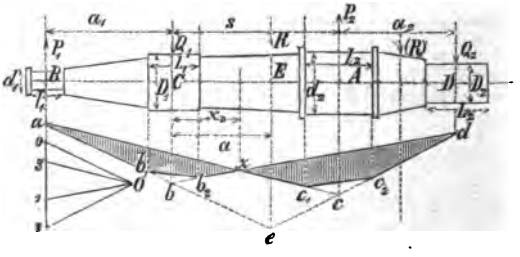
$$P_1(a_1 + x) - Q_1 x = \frac{\mathfrak{S}\pi y^3}{32} \text{ und } P_1 a_1 = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} D_1^3$$

mit $y_1 = D_1 \sqrt[3]{1 + \frac{x_1}{a_1}\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right)}$, oder auf den Achskopf E vom Durchmesser D_2 bezogen: $y_1 = D_2 \sqrt[3]{1 + \frac{x_1'}{a_2}\left(1 - \frac{Q_2}{P_2}\right)}$, hier ist x_1' die Entfernung des Querschnittes vom Durchmesser y_1 vom Achskopf E. Für $x_1' = 400$, $x_2' = 800$, $x_3' = 1200$, $x_4' = 1600$, $s = 1700$, von E aus nach links gerechnet: $y_1 = 148$, $y_2 = 150$, $y_3 = 153$, $y_4 = 155$, $D_1 = 156$. Da die Querschnittsdimensionen des Schaftes nur wenig von einander abweichen, so wird man selbstverständlich letzteren cylindrisch vom Durchmesser $= 156\,mm$ gestalten.

20) Es ist eine zweifach tragende, schmiedeiserne, massive Achse mit einem freitragenden Schenkel (s. Fig. 43) zu berechnen; die Querschnitte sind an allen Stellen Kreisflächen, die Belastungen betragen: $Q_1 = 3500\,kg$, $Q_2 = 4200\,kg$, die Schenkellängen sind: $a_1 = 700$, $a_2 = 400$, die Entfernung des linken Achskopfmittels vom Halszapfenmittel ist $s = 1700\,mm$, die Länge des freien Achskopfes ist $L = 200\,mm$.

A. Hier sind folgende drei Fälle zu unterscheiden: 1. Die Richtung der Resultierenden der gegebenen Kräfte Q_1 und Q_2 fällt zwischen die beiden Lager, wie gezeichnet, 2. die Resultierende fällt außerhalb der beiden Lager (in der Figur angedeutet), 3. die Richtung der Resultierenden fällt gerade in die Mitte des Halslagers.

Fig. 43.



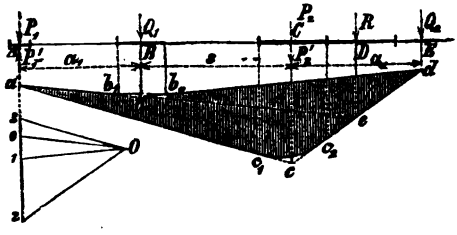
1. Fall. Für den Punkt D als Momentenpunkt findet man aus den Gleichungen $Q_1(s + a_2) = R(s + a_2 - a)$ und $R = Q_1 + Q_2$ die Zahlenwerte eingesetzt: $a = 1145{\cdot}45\,mm$, die Richtung der Resultierenden fällt also hier zwischen die Lager. Die Resultierende R in die ihr parallelen Componenten zerlegt, welche den Auflagerdrücken P_1 und P_2 entgegenwirken, so hat man, da $P_1 + P_2 = R$ ist, für A als festen Punkt die Momentengleichung $P_1(s + a_1) + Q_2 a_2 = Q_1 s$; aus den zwei letzten Gleichungen folgt, wenn man die Zahlenwerte einsetzt; $P_1 = 1780\,kg$, $P_2 = 5920\,kg$, hiermit erhält man die Dimensionen des Stirnzapfens $d_1 = 1{\cdot}13\sqrt{P_1} = 48$ und $l_1 = 1{\cdot}5\,d_1 = 72$. Den Durchmesser d_2 des Halszapfens findet man aus:

$$Q_2 a_2 = \frac{\mathfrak{S}\pi d_2^3}{32} \text{ mit } d_2 = \sqrt[3]{\frac{32\,Q_2 a_2}{\mathfrak{S}\pi}},$$

die Zahlenwerte eingesetzt: $d_2 = 140$, ferner $l_2 = 1{\cdot}5\,d_2 = 210\,mm$. Den Durchmesser D_2 des freien Achskopfes findet man aus der Gleichung: $\frac{Q_2 L_2}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} D_2^3$ mit $D_2 = \sqrt[3]{\frac{16\,Q_2 L_2}{\mathfrak{S}\pi}}$, $\mathfrak{S} = 6$ und die übrigen Zahlenwerte eingesetzt: $D_2 = 90\,mm$. Für irgend einen Schaftquerschnitt vom Durchmesser y in der Entfernung x vom linken Achskopfmittel ergibt die Rechnung: $y = D_1\sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_1}\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right)}$, wobei D_1 der Durchmesser des linken Achskopfes $D_1 = d_1\sqrt[3]{\frac{2\,a_1}{l_1}} = 128\,mm$ ist. Einen Punkt im Schafte gibt es, für welchen die Biegungsbeanspruchung $= \emptyset$ ist, weil dieser Punkt ein Wendepunkt der elastischen Linie ist, in welchem der Krümmungshalbmesser unendlich groß, also das Biegungsmoment $= \emptyset$, also $y = \emptyset$ wird. Die Ent-

fernung x_0 dieses Punktes vom linken Achskopfmittel ergibt sich aus der Gleichung: $P_1 (x_0 + a_1) - Q_1 x_0 = \emptyset$ mit $x_0 = \frac{P_1 a_1}{Q_1 - P_1}$; da aber der im Querschnitte $y = \emptyset$ auftretenden, abscherenden Kraft Rechnung getragen werden muss, so kann y nicht $= \emptyset$ gemacht werden und ergibt sich der Schaftdurchmesser an dieser Stelle ohne Rechnung genügend sicher durch die Verbindung des linken Achskopfes mit dem Halszapfen durch einen Kegelstumpf.

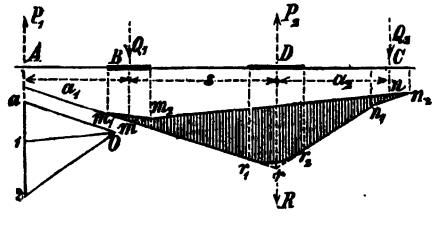
Fig. 44.



2. Fall (s. Fig. 44). Man zerlege R in die ihr parallelen Componenten, welche in A und C angreifen und hier durch die Lagerreactionen P_1 und P_2 zur Herstellung des Gleichgewichtes wieder aufgehoben werden. Für C als festen Punkt findet man aus den Gleichungen: $P_1 (a_1 + s) + Q_1 s = Q_2 a_2$ und $P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2$, die Werte P_1 und P_2; die Zapfen- und Achskopfdimensionen, sowie des Schaftes werden ebenso wie im Fall I berechnet.

3. Fall (s. Fig. 45). Hier wird die Resultierende $R = Q_1 + Q_2$ vom Halslager aufgenommen, es muss daher der in diesem herrschende Lagerdruck $P_2 = R$ sein; es muss also, weil $P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2$ ist, $P_1 = \emptyset$ sein; es werden also die Biegungsmomente im Stücke AB der Achse $= \emptyset$ sein, das heißt der Achsschenkel AB und der Zapfen bei A haben nur den zufällig sie beanspruchenden Kräften zu widerstehen und werden von den Kräften Q_1 und Q_2 gar nicht auf Biegung beansprucht. Die Achsköpfe B und C werden wie Stirnzapfen berechnet unter Berücksichtigung der Veränderung der Längenverhältnisse oder direct aus den Festigkeitsgleichungen:

Fig. 45.



$$\frac{Q_1 l_1}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} D_1^3 \text{ und } \frac{Q_2 L_2}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} D_2^3,$$

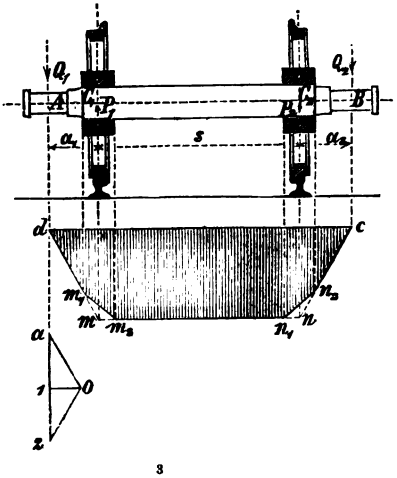
wobei L_1 und L_2 die Längen der Achsköpfe, D_1 und D_2 ihre Durchmesser bezeichnen.

21) Angenäherte Berechnung einer Eisenbahnwagenachse.

Diese ist eine zweifach tragende massive Achse mit zwei gleich langen, frei tragenden Schenkeln, die Querschnitte sind überall Kreisflächen, die Belastungen der beiden Tragpunkte sind einander gleich (s. Fig. 46).

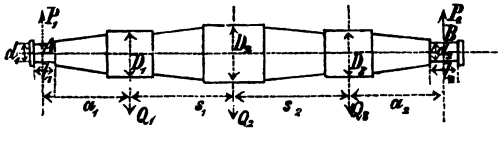
A. Wenn wir von dem Umstande absehen, dass außer dem Wagengewicht noch andere Kräfte die Festigkeit der Achse beanspruchen, so berechnet man vorstehende Achse ebenso, wie eine zweifach tragende Achse, deren Belastungen zwischen den Unterstützungspunkten liegen. Da die Belastungen und Achsschenkel gleich sind, so berechnen wir nur die eine Hälfte der Achse. Für die Zapfen hat man: $\frac{Ql}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} d^3$, und da hier bei 250—300 Umdrehungen $\frac{l}{d} = 2$ gesetzt wird, so hat man aus $\frac{Ql}{2d} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} d^2$, $d = \sqrt{\frac{32Q}{\mathfrak{S}\pi}}$; für einen beliebigen Querschnitt eines Achsschenkels in der Entfernung x von dem einen Zapfenmittel hat man nach der bekannten Formel

Fig. 46.



den Durchmesser dieses Querschnittes: $y = d\sqrt[3]{\frac{2x}{l}}$. Die Dicke D der Achsköpfe wird stärker ausgeführt, als sie sich aus der Gleichung $Qa = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} D^3$ ergibt, da nicht nur das Wagengewicht, sondern auch noch andere, hier nicht berücksichtigte Kräfte die Achse beanspruchen. Der Schaft wird cylindrisch und erhält einen Durchmesser gleich dem der Achsköpfe.

Fig. 47.



22) Es ist eine massive, schmiedeiserne Achse mit drei Tragpunkten von kreisförmigen Querschnitten nach folgenden Angaben zu berechnen (s. Fig. 47): Länge der Achse zwischen den Zapfenmitteln $= 2{\cdot}5\,m$, die Dimensionen der Achsschenkel und der Schafttheile sind folgende:

$$a_1 = 0{\cdot}6\,m,\ s_1 = 0{\cdot}5\,m,\ s_2 = 0{\cdot}9\,m,$$
$$a_2 = 2{\cdot}5 - (0{\cdot}6 + 0{\cdot}5 + 0{\cdot}9) = 0{\cdot}5\,m,$$

die Belastungen der Achsköpfe sind:

$$Q_1 = 5000\,kg,\ Q_2 = 5000\,kg,\ Q_3 = 7000\,kg.$$

A. Aus der für den Punkt B als festen Punkt geltenden Momentengleichung

$$P_1(a_1 + s_1 + s_2 + a_2) = Q_1(s_1 + s_2 + a_2) + Q_2(s_2 + a_2) + Q_3 a_2$$

und der Gleichung $Q_1 + Q_2 + Q_3 = P_1 + P_2$ folgt, wenn man die Zahlenwerte einsetzt: $P_1 = 8000\,kg$, $P_2 = 9000\,kg$, hiermit die zugehörigen Zapfendimensionen: $d_1 = 1{\cdot}13\sqrt{P_1} = 100\,mm$, $l_1 = 1{\cdot}5\,d_1 = 150\,mm$, $d_2 = 1{\cdot}13\sqrt{P_2} = 107$, $l_2 = 1{\cdot}5\,d_2 = 160\,mm$. Für die

beiden Achsschenkel von den Längen a_1 und a_2 werden wie früher für die verschiedenen Querschnitte die Durchmesser nach der Formel $y = d_1 \sqrt[3]{\frac{2x}{l}}$ bestimmt. Man findet:

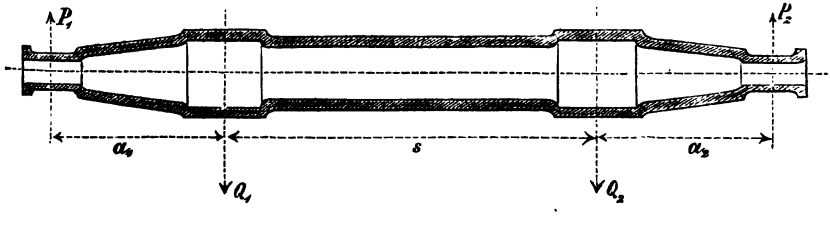
für $x = 120,\ 240,\ 360,\ 480,\ a_1 = 600\,mm$ } für den
$y = 117,\ 147,\ 168,\ 185,\ D_1 = 200\,mm$ } Schenkel a_1,
für $x = 100,\ 200,\ 300,\ 400,\ a_2 = 500\,mm$ } für den
$y = 115,\ 145,\ 166,\ 183,\ D_2 = 197\,mm$ } Schenkel a_2.

Die Berechnung der Durchmesser der beiden Schafttheile geschieht ebenso wie in Beispiel 20 nach der dort für den Schaft gebrauchten Formel, jedoch ist hier x die Entfernung eines dem linken Schafttheile angehörenden Querschnittes vom Durchmesser y, von der Mitte des linken Achskopfes vom Durchmesser D_1. Für den zweiten Schafttheil hat man die Formel zu benutzen: $y = D_2 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_2}\left(1 - \frac{Q_2}{P_2}\right)}$, hier bedeutet x die Entfernung des Querschnittes y vom Achskopf D_2; auch hier werden die theoretischen Achskopfbegrenzungen durch Kegelstumpfe mit einander verbunden.

23) Es ist eine gusseiserne, hohle Achse mit zwei gleichen Belastungen $Q_1 = Q_2 = Q = 5400\,kg$ und gleichen Schenkellängen $a_1 = a_2 = a = 450\,mm$ zu berechnen; die Entfernung zwischen den Zapfenmitteln beträgt $2{\cdot}7\,m$ (s. Fig. 48).

A. Im vorliegenden Falle werden beide Zapfendrücke einander gleich, $P_1 = P_2 = Q$, man erhält also deshalb gleiche Stirnzapfen, zwei gleiche Achsschenkeln, zwei gleiche Achsköpfe und einen cylindrischen Schaft, daher die Rechnung nur für eine Hälfte der Achse

Fig. 48.



gemacht zu werden braucht. Wir berechnen zunächst die Achse so, als ob sie eine gusseiserne massive Achse von kreisförmigem Querschnitt wäre, welche gleichwertig mit der gusseisernen hohlen Achse ist, das heißt dieselbe Tragfähigkeit hat wie diese. Für die massive Achse werden die Zapfendurchmesser
$d_0 = 1{\cdot}5\sqrt{P} = 1{\cdot}5\sqrt{5400} = 110\,mm$, $l_0 = 1{\cdot}3\,d_0 = 1{\cdot}3 \,.\, 110 = 145$.
Die Dicke des Achskopfes wird:

$$D_0 = d_0 \sqrt[3]{\frac{2a}{l_0}} = 110 \sqrt[3]{\frac{2 \,.\, 450}{145}} = 202,$$

ebenso groß wird auch der Durchmesser des Schaftes. Der äußere

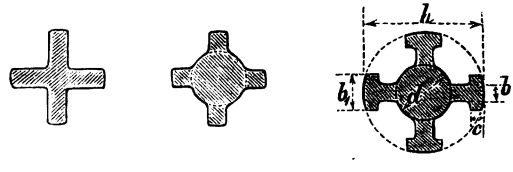
und der innere Durchmesser des hohlen Zapfens seien d_a und d_i, die Länge des hohlen Zapfens $l = l_0$, $\alpha = \frac{d_i}{d_a} = 0{\cdot}6$, man erhält dann aus der bei der Berechnung von hohlen Zapfen aufgestellten Formel sammt Tabelle (s. dort) für $\alpha = 0\,6$, $d_a = 1{\cdot}05\,d_0 = 1{\cdot}05 \,.\, .110 = 116\,mm$, darnach wird $d_i = 70$, ebenso erhält man $D_a = = 1{\cdot}05\,D_0 = 1{\cdot}5 \,.\, 202 = 212$, also $D_i = 127\,mm$. Zu bemerken ist noch, dass die Zapfen und Achsköpfe etwas vergrößert werden müssen, damit die cubische Parabel innerhalb der Begrenzungslinien des Kegelstumpfes fällt und auf den Achsköpfen die Keilbahnen gut eingebracht werden können.

Bemerkt sei, dass die Materialersparnis bei der hohlen Achse ziemlich bedeutend ist bei gleicher Festigkeit; so ergibt sich z. B., dass die Festigkeit des hohlen Zapfens, dessen äußerer Durchmesser gleich dem Durchmesser des massiven Zapfens ist, 0·988 der Festigkeit des massiven Zapfens ist; hingegen ist der Materialverbrauch des hohlen Zapfens nur 0·891 des Materials des massiven, woraus hervorgeht, dass bei nur geringer Vermehrung des äußeren Durchmessers eine bedeutende Materialersparnis bei gleicher Festigkeit erzielt wird.*)

24) Berechnung von gusseisernen Flügelachsen.

Diese Achsen haben meist zwei bis drei Tragpunkte und einen reinen, kreuzförmigen oder sternförmigen Querschnitt mit Saumnerven an den Flügeln (s. Fig. 49, 50, 51). Die Zapfen sind cylindrisch, die Achsschenkel sind massiv und konoidisch, die Achsköpfe massiv, cylindrisch und der Schaft allein oder Schaft und Achsköpfe oder Schaft, Achsköpfe und Schenkel haben einen der hier gezeichneten Querschnitte. Man berechnet zunächst die Zapfendrücke aus den gegebenen Belastungen, Schenkel- und Schaftlängen, ermittelt die

Fig. 49. Fig. 50. Fig. 51.



Zapfendimensionen und die darauf bezogenen Durchmesser der Achsschenkel, Achsköpfe und des Schaftes so, als ob alle Querschnitte volle Kreisflächen wären. Unter Zugrundelegung des Satzes, dass zwei verschiedene Querschnitte gleiche Festigkeit haben, wenn sie gleiche Querschnittsmoduli haben, leitet man aus dem irgend einer Stelle der Achse zukommenden, bekannten vollen Kreisquerschnitt die dieser Stelle zukommenden Dimensionen des kreuzförmigen, sternförmigen u. s. w. Querschnittes ab. Setzen wir z. B. den Quer-

*) Ausführliches darüber siehe: Graf, Festigkeitslehre, S. 211, Anmerkung.

schnittsmodul des sternförmigen Querschnittes mit Saumnerven gleich dem des vollen Kreisquerschnittes vom Durchmesser y, so hat man:

$$\frac{\pi y^3}{32} = \frac{1}{6h}\Big\{0{\cdot}589\,d^4 + (h-d)\,b^3 + 2\,c\,(b_1^3 - b^3) + \\ + b\,(h^3 - d^3) + (b_1 - b)\,(6\,c\,h^2 - 12\,c^2 h + 8\,c^3)\Big\}^{*)} \quad \ldots \quad \text{A)}$$

Will man einen Querschnitt ohne Kern anwenden, so setze man in dieser Formel $d = \emptyset$, mit Ausnahme des in der Klammer enthaltenen vierten Gliedes „$b\,(h^3 - d^3)$“, in welchem man $d = b$ zu setzen hat; setzt man außerdem noch in Gleichung A) $b_1 = b$, also $c = \emptyset$, so erhält man eine Formel für den reinen Kreuzquerschnitt. Es sei z. B. eine gusseiserne Flügelachse zu berechnen mit zwei gleichen Belastungen, $Q_1 = Q_2 = Q = 5400\,kg$, mit gleichen Schenkellängen $a_1 = a_2 = a = 450\,mm$, Schaftlänge $s = 1{\cdot}8\,m$; Zapfen, Achsschenkel und Achsköpfe sollen massiv kreisförmig, der Schaft kreuzförmig mit konoidischem, sich nach der Mitte zu verjüngendem Kern ausgeführt werden. Die Dimensionen der Zapfen, Schenkel und Achsköpfe nehmen wir aus dem vorhergehenden Beispiel der Berechnung einer gusseisernen, hohlen Achse, wo wir zuerst die Dimensionen der ideellen, massiven Achse mit Kreisquerschnitten, wie folgt, fanden: $d_0 = 110\,mm$, $l_0 = 145\,mm$, $D_0 = 202\,mm$. Wegen des besseren Überganges zwischen den Achsköpfen und dem Schafte nehmen wir $D_0 = 210\,mm$, die Länge der Achsköpfe sei $L = 280$; aus Beispiel 23 ersehen wir, dass der massive Schaft cylindrisch wird, also y constant ist; wir setzen daher in Formel A) $b_1 = b =$ einer constanten Größe, man erhält dann:

$$\frac{\pi y^3}{32} = \frac{1}{6h}\,[0{\cdot}589\,d^4 + (h-d)\,b^3 + b\,(h^3 - d^3)] \quad . \quad . \quad . \quad \text{I)},$$

in dieser Gleichung ist $y = D_0 = D = 210\,mm$ die einzige bekannte Größe, während h, b und d zu ermitteln sind. Die Flügelhöhe h wird für jeden Schaftquerschnitt als bekannt angenommen, und zwar in der Weise, dass man in der Mitte der Achse eine der Länge des Schaftes entsprechende, größte Flügelhöhe annimmt und die Endpunkte dieser Höhe mit den Achskopfbegrenzungen durch gerade oder krumme Linien (Kreis- oder Parabelbögen) verbindet, so dass das Flügelprofil des Schaftes geschmackvoll ausfällt; auf diese Weise werden die Flügelhöhen für die verschiedenen Querschnitte bekannt. Sehr häufig setzt man die Flügelhöhe in der Schaftmitte $= 2\,y$, nehmen wir dieses auch hier an, so ist $h = 210 \,.\, 2 = 420\,mm$; nun bleiben in Gleichung I noch die zwei Unbekannten d und b, wovon d veränderlich und b constant ist. Wir setzen zur Vereinfachung in Formel A) $b = b_1$ und $d = \emptyset$, welche Vernachlässigung man sich erlauben darf, da im Querschnitte der Schaftmitte die in der Nähe der neutralen Faserschichte liegenden Flächenelemente des Kreiskernes ohne wesentlichen Einfluss auf den Querschnittsmodul sind; wir setzen ferner im vierten Gliede $d = b$, $y = 210$, $h = 420$ ein

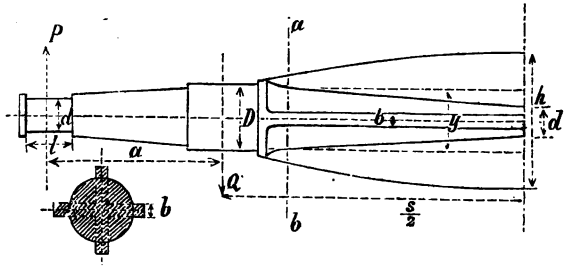
*) Die Entwickelung dieser Gleichung siehe: Graf, Festigkeitslehre. S. 213 und 214.

und erhalten dann eine Gleichung mit der Unbekannten b allein, welcher Gleichung der Wert $b = 30$ genügt; diesen Wert in Gleichung I eingesetzt, gibt eine Gleichung mit der Unbekannten d allein, welcher Gleichung der Wert $d = 116\,mm$ genügt. Man trägt nun in der Mitte des Schaftes den gefundenen Kerndurchmesser auf und zieht von den Endpunkten desselben gerade Linien nach den Achsköpfen, man erhält dann den Kern als zwei sich nach der Schaftmitte hin verjüngende Kegelstumpfe, was eine hinreichend genaue Annäherung an die **genaue** Form ist. Weit einfacher gestaltet sich aber die Rechnung, wenn man die Kerndicke d constant und bekannt, die Flügeldicke b aber als veränderlich und unbekannt betrachtet. Man erhält dann aus Gleichung I) nach einer kleinen Vernachlässigung:

$$\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\left(\frac{d}{h}\right)^4 + \frac{16}{3\pi} \cdot \frac{b}{h}\left[1 - \left(\frac{d}{h}\right)^3\right]}.$$

Nimmt man d constant und bekannt an, so kennt man für jeden Schaftquerschnitt das Verhältnis $\frac{d}{h} = \alpha$, ebenso das Verhältnis $\frac{y}{h} = \alpha_1$, daher bleibt noch das unbekannte Verhältnis $\frac{b}{h}$ zu berechnen übrig. Aus der letzten Gleichung folgt, die kurze Bezeichnung der Verhältnisse beibehalten: $\frac{b}{h} = \frac{\alpha_1^3 - \alpha^4}{\frac{16}{3\pi}(1 - \alpha^3)}$, setzen wir z. B. für die Schaftmitte $h = 2y$, $\frac{d}{h} = 0{\cdot}3$, $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$, so erhält man $\frac{b}{h} = 0{\cdot}07$, also $b = 29{\cdot}4 \backsim 30\,mm$; in gleicher Weise hat man nun für mehrere Schaftquerschnitte die denselben entsprechenden Werte von b zu

Fig. 52.



bestimmen, als senkrechte Gerade zur geometrischen Achse aufzutragen und die Endpunkte dieser senkrechten Geraden durch stetige krumme Linien zu verbinden (s. Fig. 52 und 53).

25) Es ist eine gusseiserne Flügelachse für dieselben Bedingungen wie im vorigen Beispiele zu berechnen, der Querschnitt des Schaftes sei rein kreuzförmig.

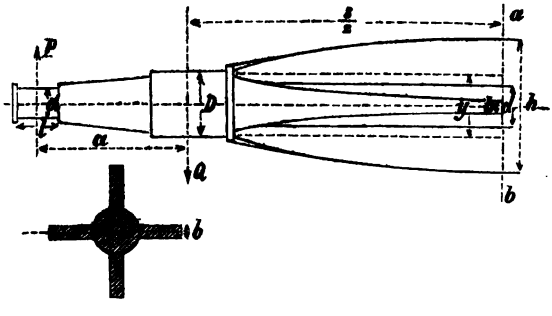
A. Die Dimensionen der Zapfen, Schenkel und Achsköpfe fallen ebenso aus, wie im vorigen Beispiel. Zur Berechnung des Schaftes

haben wir in Formel *(A)* (s. vor. Beispiel) zu setzen: $b_1 = b$, $d = 0$, im vierten Gliede $d = b$; man erhält dann mit der Annahme $y = 210\,mm$ (constant) und der Flügelhöhe in der Mitte des Schaftes $h = 420\,mm$, eine Gleichung mit der Unbekannten b, welcher angenähert der Wert $b = 32\,mm$ entspricht. Für $h = 400$ erhält man $b = 34$,

für $h = 370$, wird $b = 39$,
„ $h = 333$, „ $b = 49$,
„ $h = 288$, „ $b = 65$,
„ $h = 258$, „ $b = 82$.

Diese Flügeldicken werden der Reihe nach in den betreffenden Punkten als Senkrechte zur geometrischen Achse aufgetragen und die Endpunkte dieser Senkrechten durch stetige krumme Linien verbunden, die sich in der Nähe der Achsköpfe in die Flügelprofile verlaufen (s. Fig. 53).

Fig. 53.



26) Es ist eine hölzerne Wasserradachse aus nachfolgenden Angaben zu berechnen: Die Länge der Achse zwischen den beiden Zapfenmitteln beträgt $2{\cdot}7\,m$, die Schenkellängen seien $a_1 = 0{\cdot}8\,m$, $a_2 = 0{\cdot}45\,m$ und die Belastungen senkrecht zur Achse seien: $Q_1 = 4000\,kg$, $Q_2 = 5000\,kg$, die Zapfen sind aus Gusseisen.

A. Zur Ermittlung der Zapfendrücke P_1 und P_2 benützen wir die Gleichung, welche bei der in Beispiel 19 berechneten zweifach tragenden Achse angewendet wurde; man erhält: $P_1 = \frac{Q_1(s + a_2) + Q_2 a_2}{a_1 + s + a_2}$, die Zahlenwerte eingesetzt, gibt $P_1 = 4185\,kg$, daher $P_2 = Q_1 + Q_2 - P_1 = 4815\,kg$. Für die Zapfen nehmen wir hier $\frac{l}{d} = 1{\cdot}5$, dann ist $d_1 = 1{\cdot}5\sqrt{P_1} = 1{\cdot}5\sqrt{4185} = 97$, dieser Wert ist aber noch mit $\sqrt[3]{\frac{1{\cdot}5}{1{\cdot}3}}$ zu multiplicieren (s. Beispiel über Zapfenberechnung), da die angewandte Formel für das Verhältnis $\frac{l}{d} = 1{\cdot}3$ entwickelt wurde; man erhält daher den verbesserten Wert von $d_1 = 97\,.\,1{\cdot}154 = 112\,mm$, $l_1 = 1{\cdot}5\,.\,112 = 170\,mm$;

$d_2 = 1{\cdot}5\sqrt{P_2}\,.\sqrt[3]{\frac{1{\cdot}5}{1{\cdot}3}} = 1{\cdot}5\sqrt{4815}\,.\,1{\cdot}154 = 120\,mm$; $l_2 = 1{\cdot}5\,.\,120 = 180\,mm$. Für die Durchmesser D_1 und D_2 der Achsköpfe einer

gleichwertigen, massiven, gusseisernen Achse haben wir nach der bei der zweifach belasteten Achse angewandten Formel:

$$D_1 = d_1 \sqrt[3]{\frac{2a_1}{l_1}} = 112 \sqrt[3]{\frac{1600}{170}} = 236,$$

$$D_2 = d_2 \sqrt[3]{\frac{2a_2}{l_2}} = 120 \sqrt[3]{\frac{900}{180}} = 205.$$

Es sei der Zugtragmodul für Holz $T_h = 2$, für Gusseisen $T_g = 7{\cdot}5$, so ist für den Achskopf der hölzernen Achse das Biegungsmoment $M_h = \frac{\pi}{32} D_h^3 . T_h$ bei der Beanspruchung bis zur Elasticitätsgrenze; für die gusseiserne Achse ist unter gleichen Umständen: $M_g = \frac{\pi}{32} D_g^3 . T_g$, da $M_h = M_g$ ist, so folgt daraus:

$$D_h = D_g \sqrt[3]{\frac{T_g}{T_h}} = D_g \sqrt[3]{\frac{7{\cdot}5}{2}} = 1{\cdot}553\, D_g = 1{\cdot}553 . 236 = 366\, mm.$$

Da dieser Durchmesser dem größeren Achskopf angehört und wir die Achse cylindrisch machen, so braucht man den zweiten Achskopf nicht mehr zu berechnen. Angenommen, der Querschnitt der Achse sei ein reguläres Sechseck, so ist für die zweite Lage des Sechseckes (s. Fig. 54 u. 55) der kleinere Querschnittsmodul, nämlich $Z = 0{\cdot}5413\, b^3$, zu nehmen, hiermit erhält man aus: $M = \frac{\pi}{32} D_h^3 \mathfrak{S} = 0{\cdot}5413\, b^3 \mathfrak{S}$, die Sechseckseite

Fig. 54.

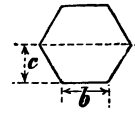
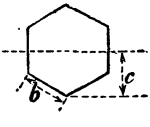


Fig. 55.

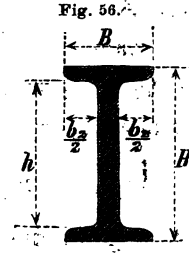


$$b = D_h \sqrt[3]{\frac{\pi}{32 . 0{\cdot}5413}} = 366 . 0{\cdot}5656 = 207\, mm.$$

Es ist jedoch noch zu bemerken, dass die Werte von D_h und b wegen Schwächung der Achse durch Einbringung der Gusszapfen etwas verstärkt werden müssen.

27) Ein Doppel-T-Träger, dessen Querschnittsdimensionen in Fig. 56 angegeben sind, ist an seinen beiden Enden unterstützt und soll auf seiner freien Länge $l = 4\, m$ eine über die ganze Länge gleichmäßig vertheilte Last tragen; wie groß ist die Tragfähigkeit, *a)* wenn der Träger aus Schmiedeisen, *b)* wenn er aus Gusseisen ist?

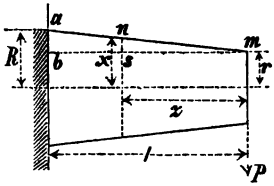
Fig. 56.



A. Für den vorliegenden Unterstützungs- und Belastungsfall finden wir aus der Formel $\frac{Pl}{8} = \mathfrak{S} Z$ mit $Z = \frac{B H^3 - b h^3}{6 H}$ und $\mathfrak{S} = 7{\cdot}5$ für Schmiedeisen, wenn wir die Zahlenwerte einsetzen: ad *a)* $P = 5798\, kg$, für Gusseisen mit $\mathfrak{S} = 2{\cdot}5$: ad *b)* $P = 1932{\cdot}6\, kg$, oder man findet diesen zweiten Wert von P aus der Proportion: $P_s : P_g = \mathfrak{S}_s : \mathfrak{S}_g$, woraus $P_g = \frac{P_s \mathfrak{S}_g}{\mathfrak{S}_s} = \frac{5798 . 2{\cdot}5}{7{\cdot}5} = 1932{\cdot}7$ folgt.

28) Ein abgestutzter Kegel aus Gusseisen ist an einem Ende in horizontaler Lage eingemauert und am anderen Ende durch eine vertical nach abwärts wirkende Last P auf Biegung beansprucht; die Halbmesser der beiden Grundflächen sind: $R = 300\,mm$, $r = 200\,mm$, die freie Länge des Stutzes ist $l = 500\,mm$, man fragt: *a)* Wo ist der gefährliche Querschnitt, *b)* wie groß ist die Tragfähigkeit des Kegelstutzes, wenn im gefährlichen Querschnitte eine Spannung von $2{\cdot}5\,kg$ gestattet ist, *c)* hat der Kegelstutz die Form der gleichen Festigkeit oder nicht, *d)* wie groß ist die Tragfähigkeit eines Cylinders, dessen Halbmesser gleich dem mittleren Halbmesser und dessen Länge gleich der des Kegelstutzes ist?

Fig. 57.



A. Angenommen, es sei in der Entfernung z vom freien Ende des Kegels (s. Fig. 57) der gefährliche Querschnitt vom Halbmesser x, so ist für diesen Querschnitt das Biegungsmoment: $M = \frac{\mathfrak{S}\pi x^3}{4}$, für die Ebene dieses Querschnittes muss $P = \frac{M}{z}$ ein Minimum sein. Die Gerade mb parallel zur Kegelachse gezogen, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke amb und mns eine Proportion, woraus $x = \frac{rl + (R-r)z}{l}$ resultiert, diesen Wert von x in die Gleichung $M = Pz = \frac{\mathfrak{S}\pi x^3}{4}$ eingesetzt und P bestimmt, gibt:

$$P = \frac{\mathfrak{S}\pi[(R-r)z + rl]^3}{4l^3 z},$$

die Rechnung ergibt*), dass dieser Ausdruck ein Minimum wird für $z = \frac{rl}{2(R-r)}$, mit diesem Werte von z erhält man:

$$P = \frac{27\,\mathfrak{S}\pi r^3(R-r)}{16l};$$ in die Gleichungen für P und z die Zahlenwerte eingesetzt, erhält man $P = 10597{\cdot}5\,kg$, $z = 500\,mm$, somit liegt der gefährliche Querschnitt an der Einmauerungsstelle. Setzt man $z = \frac{rl}{2(R-r)} = l$, so folgt hieraus, $\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$, für dieses Verhältnis der Halbmesser der beiden Grundflächen liegt also der gefährliche Querschnitt immer an der Einmauerungsstelle. Der Kegelstutz hat nicht die Form der gleichen Festigkeit; denn an der Einmauerungsstelle ist $\mathfrak{S} = 2{\cdot}5$ und in einer beliebigen Entfernung z vom freien Ende ist $\mathfrak{S} = \frac{4Pl^3z}{\pi[(R-r)z + rl]^3}$, das heißt für verschiedene Werte von z, also für verschiedene Querschnitte ist $\mathfrak{S}$ verschieden groß. Ein Cylinder vom Halbmesser $r_1 = \frac{R+r}{2} = 250$

*) Näheres siehe Graf, „Festigkeitslehre", S. 223, Spielhagen und Schurich, Wien.

hat bei derselben Länge wie der Kegelstutz eine Tragfähigkeit

$$P = \frac{\pi r_1^3 \mathfrak{S}}{4l} = \frac{3{\cdot}14\,(250)^3 \,.\, 2{\cdot}5}{4\,.\,500} = 61327{\cdot}5\ kg,$$

also weit geringer als beim Kegelstutz.

29) Ein Doppel-T-Träger aus Walzeisen, dessen Querschnittsdimensionen aus Fig. 58 zu ersehen sind, ist an seinen beiden Enden unterstützt (liegt frei auf), die freie Länge zwischen den Stützen ist $l = 5\,m$, welche Last P kann dieser Träger in der Mitte tragen, wenn $\mathfrak{S} = 5$ gesetzt wird?

Fig. 58.

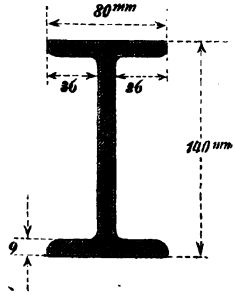
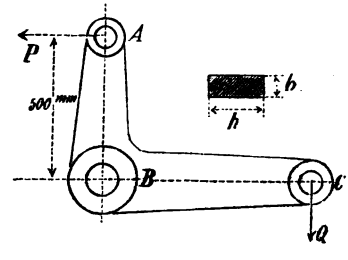


Fig. 59.



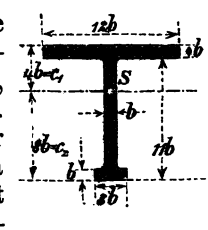
A. Für diesen Fall hat man aus der Festigkeitsgleichung $\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S}(BH^3 - bh^3)}{6H}$ mit $Z = \frac{80\,.\,(140)^3 - 72\,(122)^3}{6\,.\,140} = 105688$, $P = 422{\cdot}75 kg$.

30) An dem Arme AB des schmiedeisernen Hebels ABC (s. Fig. 59) wirkt in horizontaler Richtung die Kraft $P = 250\,kg$, um den Widerstand Q am Hebelarm BC im Gleichgewichte zu erhalten. Welche Querschnittsdimensionen muss der Arm AB an der Nabe des Hebels erhalten, wenn $\mathfrak{S} = 4$ genommen und der Querschnitt des Armes ein Rechteck mit dem Verhältnis der Seiten $h = 3b$ ist?

A. Man erhält aus der diesem Falle entsprechenden Festigkeitsgleichung $Pl = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$, $h = \sqrt[3]{\frac{18\,Pl}{\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{18\,.\,250\,.\,500}{4}} = 82\ mm$, hiermit wird $b = 27\frac{1}{3}\,mm$.

31) Ein gusseiserner Balken von einem in Fig. 60 angegebenen Querschnitte (Doppel-T-Querschnitt mit ungleich breiten Flantschen) ist an einem Ende in horizontaler Lage eingemauert und am anderen, freien Ende durch eine Last $P = 2500\,kg$ auf Biegung beansprucht, die freie Länge des Balkens ist $l = 2\,m$, es sind die Querschnittsdimensionen zu berechnen.

Fig. 60.



A. Für den vorliegenden Fall hat man zur Querschnittsbestimmung die Formel $Pl = \mathfrak{S} Z$; da aber dieser Querschnitt inbezug seiner Höhe nicht symmetrisch ist, so hat man, wenn S der Schwer-

punkt des Querschnittes, c_1 und c_2 seine Entfernungen von der oberen und unteren Kante bedeuten, zwei Querschnittsmoduli, $Z_1 = \frac{J}{c_1}$, $Z_2 = \frac{J}{c_2}$, der kleinere Wert wird in Rechnung gezogen. Allgemein soll für die günstigste Materialverwertung der Querschnitt so angeordnet werden, dass die zulässigen Maximalspannungen auf der Zug- und Druckseite gleichzeitig eintreten, dieses ist der Fall, wenn $c_1 : c_2 = \mathfrak{S}_1 : \mathfrak{S}_2$, wobei $\mathfrak{S}_1$ die Zug-, $\mathfrak{S}_2$ die Druckspannung bedeutet. Querschnitte dieser Anordnung heißen „Querschnitte gleicher Festigkeit", weil bei denselben die volle Zug- und Druckfestigkeit des Materials ausgenutzt wird. Bei Gusseisen ist $\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2} = \frac{1}{2}$. Die Entfernung c_1 bestimmt man nach der Schwerpunktslehre durch die Formel $c_1 = \frac{\Sigma(fd)}{F}$, das ist gleich der Summe der Producte aus den einzelnen Flächentheilen $f_1, f_2, f_3 \ldots$ des ganzen Querschnittes F in die Entfernungen ihrer Schwerpunkte $d_1, d_2, d_3 \ldots$ von der oberen Kante des Querschnittes. Mit Bezug auf die in der Figur ersichtliche Bezeichnung ist:

$$f_1 = 12\,b^2, \quad f_2 = 10\,b^2, \quad f_3 = 3\,b^2$$
$$d_1 = 0{\cdot}5\,b, \quad d_2 = 6\,b, \quad d_3 = 11{\cdot}5\,b,$$

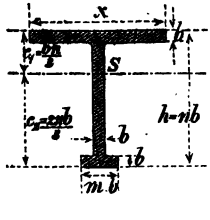
$F = f_1 + f_2 + f_3 = 25\,b^2$, hiermit erhält man

$$c_1 = \frac{f_1 d_1 + f_2 d_2 + f_3 d_3}{F} = 4\,b, \text{ also } c_2 = 8\,b \text{ und } \frac{c_2}{c_1} = 2,$$

also ist der vorliegende Querschnitt ein Querschnitt gleicher Festigkeit; die Werte c_1 und c_2 sind in der Aufgabe als unbekannt zu betrachten. Im vorliegenden Falle ist $\mathfrak{S}_1 Z_1 = \mathfrak{S}_2 Z_2 = M$; ist aber $\mathfrak{S}_1 Z_1 \gtrless \mathfrak{S}_2 Z_2$, dann ist der kleinere Wert dieser beiden Producte in die Rechnung einzuführen. Für gusseiserne Träger nehme man $M = \mathfrak{S}_1 Z_1$, wenn $\frac{c_1}{c_2} > \frac{1}{2}$, also $Z_1 \mathfrak{S}_1 < Z_2 \mathfrak{S}_2$, ist aber $\frac{c_1}{c_2} < \frac{1}{2}$, dann setze man $M = \mathfrak{S}_2 Z_2$, da dann auch $\mathfrak{S}_2 Z_2 < \mathfrak{S}_1 Z_1$ ist. In die Formel für das Trägheitsmoment des vorliegenden Querschnittes die in der Figur angegebenen Verhältniswerte eingesetzt, gibt:

$J = 442\,b^4$, also $Z_2 = \frac{J}{c_2} = \frac{442\,b^4}{8\,b} = 55{\cdot}25\,b^3$, man erhält also aus der Gleichung $Pl = \mathfrak{S}_2 Z_2 = 5 \,.\, 55{\cdot}25\,b^3$, wenn man die Zahlenwerte einsetzt: $b = \sqrt[3]{\frac{Pl}{276{\cdot}25}} = 26\,mm$, die obere Flantsche wird nun $12 \,.\, 26 = 312\,mm$ und die untere Flantsche $3 \,.\, 26 = 78\,mm$ breit, womit die Querschnittsdimensionen bestimmt sind.

Fig. 61.



32) Ein gusseiserner Balken, dessen Querschnitt seiner Form nach in Fig. 61 dargestellt ist, wird durch das Moment M auf Biegung beansprucht; es sollen die Dimensionen des Querschnittes so ausgemittelt werden, dass derselbe ein Querschnitt gleicher Festigkeit werde; hierbei seien m und n bekannte ganze Zahlen, die beiden Flantschen und der verticale Steg haben dieselbe Dicke b, die Höhe des Querschnittes sei

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

ein n-faches, die Breite der unteren Flantsche ein m-faches der Stegdicke b, die Breite x der oberen Flantsche und die Dicke b sind zu finden, respective durch das Moment M und die Spannung $\mathfrak{S}$ auszudrücken.

A. Die Bedingung, dass der Querschnitt ein solcher von gleicher Festigkeit sei, ist ausgedrückt durch den Satz, dass die horizontale Schwerlinie die Höhe des Querschnittes in zwei solche Theile zerlege, die sich zu einander verhalten, wie 1 : 2. Zerlegt man den ganzen Querschnitt in die Flächentheile $f_1 = x\,b$, $f_2 = (n-2)\,b^2$, $f_3 = m\,b^2$, deren Schwerpunktsabstände von der obersten Kante des Querschnittes $a_1 = 0{\cdot}5\,b$, $a_2 = (n-2)\frac{b}{2} + b$, $a_3 = n\,b - \frac{b}{2}$ sind, so lautet die Bedingungsgleichung für ein Profil gleicher Festigkeit: $\frac{Fh}{3} = f_1 a_1 + f_2 a_2 + f_3 a_3$, hierin für F, f_1, f_2 . . . . a_1, a_2 . . . . die Werte gesetzt, erhält man eine Gleichung, die nach x aufgelöst, gibt: $x = \frac{b\,[n(n-2+4m)-3m]}{2n-3}$, diesen Wert von x in die Formel für das Trägheitsmoment J des vorliegenden Querschnittes, nämlich

$$J = \frac{1}{3}\,[x\,c_1^3 + m\,b\,c_2^3 - (x-b)(c_1-b)^3 - (m\,b-b)(c_2-b)^3]$$

eingesetzt, erhält man nach gehöriger Reduction:

$$J = \frac{b^4}{3}\left\{\frac{n^2\,[(n-3)^2+5+m(4n-13)]+3(m-1)(5n-2)}{2n-3}\right\},$$

der Querschnittsmodul wird:

$$Z_1 = \frac{J}{c_1} = \frac{b^3\{n^2\,[(n-3)^2+5+m(4n-13)]+3(m-1)(5n-2)\}}{n(2n-3)};$$

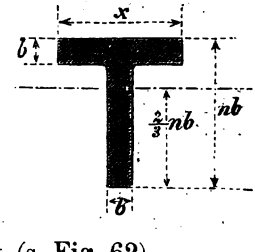
setzen wir z. B. $n = 12$, $m = 3$, so wird $J = 442\,b^4$,

$$Z_1 = \frac{J}{c_1} = \frac{442\,b^4}{4\,b} = 110{\cdot}5\,b^3, \text{ und } Z_2 = \frac{J}{c_2} = \frac{442\,b^4}{8\,b} = 55{\cdot}25\,b^3,$$

ferner wird $x = 13{\cdot}1\,b \backsim 12\,b$. Setzen wir $Z_1 = \frac{M}{\mathfrak{S}_1} = 110{\cdot}5\,b^3$, so resultiert daraus: $b = \sqrt[3]{\frac{M}{110{\cdot}5\,\mathfrak{S}_1}}$ und $x = 12{\cdot}1\sqrt[3]{\frac{M}{110{\cdot}5\,\mathfrak{S}_1}}$.

Nimmt man nun für m und n verschiedene Werte an, so kann man mittelst der Formeln für x, J und Z die Dimensionen der verschiedenen T-Querschnitte gleicher Festigkeit berechnen. Bekanntlich hat die Anwendung dieser Querschnittsformen den Vortheil der vollen Ausnützung der Zug- und Druckfestigkeit des Gusseisens und des dadurch bedingten, geringeren Materialverbrauches.

Fig. 62.



33) Es sind für die T-Form des Querschnittes gleicher Festigkeit allgemeine Formeln für den Flächeninhalt F, die Flantschenbreite x, das Trägheitsmoment J, die Querschnittsmoduli Z_1 und Z_2 zu entwickeln, wenn die Höhe des Querschnittes $= n\,b$, das heißt ein ganzes Vielfaches der Stegdicke b gesetzt wird und die horizontale Flantsche auch die Dicke b hat (s. Fig. 62).

A. Nach dem Satze, dass das statische Moment der ganzen Querschnittsfläche inbezug auf eine Gerade (hier die oberste Kante des Querschnittes von der Länge $= x$) gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen Flächentheile inbezug auf dieselbe Gerade, hat man für das T-Profil von der Form der gleichen Festigkeit die Gleichung: $\frac{F \cdot nb}{3} = f_1 d_1 + f_2 d_2$, oder da $F = f_1 + f_2 = xb + (n-1)b^2$, ferner $d_1 = \frac{b}{2}$, $d_2 = \frac{(n-1)b}{2} + b = \frac{\cdot b}{2}$ $(n+1)$ ist, so hat man auch:

$$[xb + (n-1)b^2]\frac{nb}{3} = xb \cdot \frac{b}{2} + (n-1)b^2 \cdot \frac{b}{2}(n+1),$$

diese Gleichung nach x aufgelöst: $x = \left(\frac{n^2+2n-3}{2n-3}\right)b$; setzt man in die Formel für das Trägheitsmoment des vorliegenden Querschnittes diesen Wert von x ein, so erhält man nach gehöriger Reduction: $J = \frac{n^3(n-1)^3b^4}{3(2n-3)}$, die Querschnittsmoduli sind dann:

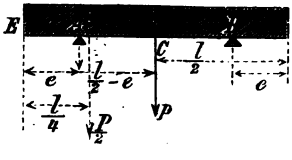
$$Z_1 = \frac{n(n-1)^3b^3}{2n-3},\quad Z_2 = \frac{n(n-1)^3b^3}{2(2n-3)};$$

in die Formel für F den Wert von x eingesetzt: $F = \frac{3nb^2(n-1)}{2n-3}$; setzt man nun in die für x, J, Z_1, Z_2 und F gefundenen Werte für n nacheinander die Werte $n = 6, 7, \ldots$, so erhält man alle diese Größen durch die Flantschendicke b allein ausgedrückt. Aus der Gleichung $Z_2 = \frac{M}{\mathfrak{S}_2} = \frac{n(n-1)^3b^3}{2(2n-3)}$ folgt: $b = \sqrt[3]{\frac{2(2n-3)M}{n(n-1)^3\mathfrak{S}_2}}$. Es sei z. B. ein an einem Ende eingemauerter, gusseiserner Balken von $1\,m$ freier Länge mit $P = 3000\,kg$ auf seiner ganzen Länge gleichmäßig belastet, der Querschnitt sei ein T-Profil gleicher Festigkeit, es sind die Dimensionen desselben auszurechnen.

Es ist $M = \frac{Pl}{2} = 1500000$, wir setzen z. B. $n = 8$, $\mathfrak{S}_2 = 5$, dann ergibt sich $b = 27\,mm$, $x = 160\,mm$, $h = 8b = 216\,mm$.

34) Ein prismatischer Balken von der Länge l, der mit seinen beiden Enden frei auf Stützen aufruht, habe die Tragkraft P, wenn er auf seiner ganzen Länge gleichmäßig belastet wird; diese Tragkraft soll dadurch vermehrt werden, dass man die Stützen nach innen rückt; man fragt: 1. Um wie viel sind die beiden Stützen von den Enden des Balkens nach innen zu rücken, damit derselbe die größtmöglichste Tragkraft erlange? 2. Wie groß ist diese größte Tragkraft? (S. Fig. 63.)

Fig. 63.

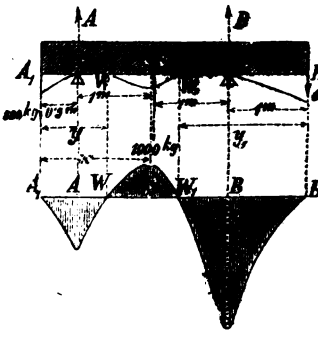


A. Die Entfernungen der Unterstützungen des Balkens von den Enden desselben seien e, e, das Biegungsmoment für den Punkt C in der Mitte der Länge sei M_C, für die Unterstützungen in A und B seien die Momente M_A und M_B; man findet: $M_C = \frac{P}{8}(l - 4e)$,

$M_A = M_B = \frac{Pe^2}{2l}$, die Bedingung dafür, dass $M_A \lessgtr M_C$ ist, lautet: $\frac{Pe^2}{2l} \lessgtr \frac{Pl}{8} - \frac{Pe}{2}$, woraus folgt: $e \gtrless -\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{2}$, oder $e \lessgtr 0{\cdot}207\,l$. Ist $e > 0{\cdot}207\,l$, also $M_A > M_C$, so hat man zur Querschnittsbestimmung: $Z = \frac{M_A}{\mathfrak{S}} = \frac{Pe^2}{2l\mathfrak{S}}$, für $e < 0{\cdot}207\,l$, ist $Z = \frac{M_C}{\mathfrak{S}} = \frac{P(l-4e)}{8\mathfrak{S}}$ zur Querschnittsbestimmung zu benutzen. Die günstigste Lage der Stützen ist offenbar die, wo $e = 0{\cdot}207\,l$ ist, dann ist $M_A = M_B = M_C$; für diesen Fall ist $M = \frac{P(0{\cdot}207\,l)^2}{2l} = 0{\cdot}0214\,Pl = \mathfrak{S}Z$, woraus $P = \frac{46{\cdot}7\,\mathfrak{S}Z}{l}$ folgt. Liegen die Unterstützungen an den Enden des Balkens, so ist $P = \frac{8\mathfrak{S}Z}{l}$, somit ist die Tragkraft um $\frac{46{\cdot}7}{8} = 5{\cdot}8$mal größer, wenn die Stützen je eine um $0{\cdot}207\,l$ von den Enden nach innen gerückt werden.

35) Ein prismatischer Balken von der Länge $l = 3\frac{1}{2}\,m$ ist an zwei Punkten seiner Länge A und B, welche von den Enden A_1 und B_1 um $0{\cdot}5\,m$ und $1\,m$ entfernt sind, unterstützt und durch eine auf seine ganze freie Länge gleichmäßig vertheilte Belastung von $P = 8000\,kg$ und noch durch drei Einzellasten von $P_1 = 800\,kg$ in A_1 angreifend, $P_2 = 1000\,kg$ in C_1 angreifend, $1\frac{1}{2}\,m$ von A_1 entfernt, und $P_3 = 600\,k$, in B_1 angreifend, auf Biegung beansprucht. Es ist zu untersuchen, ob die elastische Linie Wendepunkte habe, das heißt mit anderen Worten, ob man hier einen gusseisernen Träger mit Vortheil anwenden könne (s. Fig. 64).

Fig. 64.



A. Bestimmt man für einige Querschnitte des Balkens die Biegungsmomente und findet, dass sie alle gleiche Vorzeichen haben, so hat die elastische Linie keine Wendepunkte, dann kann man einen gusseisernen Träger mit Vortheil anwenden. Haben aber die Momente verschiedene Vorzeichen, so hat die elastische Linie Wendepunkte, denn das Moment kann von dem positiven in den negativen Wert nur durch die Null hindurchgehen, das heißt an irgend einer Stelle des Balkens ist das Moment $= \emptyset$, und an dieser Stelle ist ein Wendepunkt der elastischen Linie. Die Auflagerdrücke A und B in den Punkten A und B ergeben sich mit $A = 4200^k$, $B = 6200^k$. Um zu erfahren, wo es ein Maximum eines Biegungsmomentes gibt, wo also ein gefährlicher Querschnitt ist, suchen wir von A_1 aus die verticalen Schubkräfte für einige Querschnitte, die aufwärts wirkenden Verticalkräfte als positive, die abwärts wirkenden als negative angenommen. Für die Punkte A und C_1 sind die Verticalkräfte:

$$V_A = 4200 - 800 - \frac{8000}{3{\cdot}5} \cdot 0{\cdot}5 = 2257\frac{1^k}{7}$$

$$V_{C_1} = 4200 - 800 - 1000 - \frac{8000}{3{\cdot}5} \cdot 1{\cdot}5 = -1028\frac{4^k}{7}.$$

Da V_A positiv und V_{C_1} negativ ist, so muss es zwischen A und C_1 ein Maximalbiegungsmoment geben, denn der positive Wert der Verticalkraft kann nur durch die Null in den negativen Wert übergehen; dort aber, wo die Verticalkraft zwischen den Stützen $= \emptyset$ ist, ist bekanntlich ein Maximalbiegungsmoment. Die Entfernung dieses Punktes vom Balkenende A_1 findet sich daher aus der Bedingung, dass für diesen Querschnitt, also hier für den Punkt C die Verticalkraft $= \emptyset$ ist; man hat daher aus:

$$V_C = 4200 - 800 - \frac{8000}{3{\cdot}5} \cdot x = \emptyset, \quad x = 1{\cdot}488\,m;$$

das größte positive Biegungsmoment ist also

$$M_C = 4200(1{\cdot}488 - 0{\cdot}5) - 800 \,.\, 1{\cdot}488 - \frac{8000}{3{\cdot}5} \cdot \frac{(1{\cdot}488)^2}{2},$$

oder $M = 429{\cdot}16$ Kilogrammeter. Bilden wir von links aus die Momente, so ist das Moment über der Stütze in A negativ (die rechtsdrehenden Momente gelten als positive, die linksdrehenden als negative). Es ist

$$M_A = -800 \,.\, 05 - \frac{8000}{3{\cdot}5} \cdot \frac{(0{\cdot}5)^2}{2} = -686,$$

$$M_B = 4200 \,.\, 2 - 800 \,.\, 2{\cdot}5 - 1000 \,.\, 1 - \frac{8000}{3{\cdot}5} \cdot \frac{(2{\cdot}5)^2}{2} = -1743,$$

daher muss es sowohl zwischen A und C_1, als auch zwischen B und C je einen Wendepunkt der elastischen Linie geben, weil zwischen A und B ein zweimaliger Zeichenwechsel des Momentes eintritt; die Entfernung y des Wendepunktes W vom linken Balkenende findet man aus der Bedingung, dass für den Punkt W das Biegungsmoment $= \emptyset$ ist; man hat daher für diesen Punkt:

$4200(y - 0{\cdot}5) - 800\,y - \frac{8000}{3{\cdot}5} \cdot \frac{y^2}{2} = \emptyset$, woraus $y = 1{\cdot}4875 \pm 0{\cdot}6125$ folgt; da aber $y < 1{\cdot}5\,m$ sein muss, so folgt $y = 1{\cdot}4875 - 0\,6125 = 0{\cdot}875\,m$.

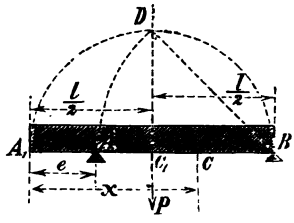
In gleicher Weise findet man die Entfernung y_1 des zweiten Wendepunktes vom rechten Balkenende mit $y_1 = 1{\cdot}69\,m$; einen gusseisernen Träger kann man also hier mit Vortheil nicht anwenden. Eine graphische Darstellung der Biegungsbeanspruchung zeigt Fig. 64, die positiven sind als nach aufwärts-, die negativen als nach abwärtsgehende Senkrechte auf $A_1 B_1$ aufgetragen. Es ist ersichtlich, dass in A und B je ein negatives, im Punkte C ein positives Maximalbiegungsmoment und in B das absolut größte Biegungsmoment stattfindet, nach welchem der Querschnitt des Balkens aus der Gleichung $M_B = \mathfrak{S} Z = 1743$ Kilogrammeter zu berechnen ist, wobei dann natürlich das negative Vorzeichen keine Bedeutung mehr hat.

36) Ein prismatischer Balken, der auf seine ganze Länge gleichmäßig mit $P kg$ belastet werden soll, ruht mit dem einen Ende

frei auf einer Stütze auf; es ist die Lage der anderen Stütze so zu bestimmen, dass der Balken ein Maximum trägt (s. Fig. 65).

A. Angenommen, wir hätten die gesuchte Lage der Stütze in A, das ist die Entfernung e, schon gefunden. Wir suchen das zwischen A und B wirkende Maximalbiegungsmoment; angenommen, dieses finde im Punkte C, in der Entfernung x vom linken Balkenende statt. Hat nun die Stütze in A eine solche Lage, dass das Moment über derselben gleich dem Maximalbiegungsmoment in C ist, dann ist offenbar das Maximum der Tragkraft erreicht, denn dann hat der Balken zwei gefährliche Querschnitte, und außerdem wird das Balkenmaterial an zwei Stellen vollkommen ausgenutzt. Die Entfernung x findet man aus der Bedingung, dass im Punkte C, wo das Maximalbiegungsmoment stattfindet, die den Balken auf Abscheerung beanspruchende Verticalkraft $V = 0$ ist. Es ist aber $V = A - \frac{Px}{l} = 0$, woraus $x = \frac{Al}{P}$ folgt; für B als festen Punkt ist $A(l-e) = \frac{Pl}{2}$, woraus der Stützendruck A im Punkte A sich mit $A = \frac{Pl}{2(l-e)}$ ergibt; hiermit erhält man:

Fig. 65.



$x = \frac{l^2}{2(l-e)}$ und $M_c = A(x-e) - \frac{Px^2}{2l}$, oder $M_c = \frac{Pl(l-2e)^2}{8(l-e)^2}$. Das Moment über der Stütze in A ist $M_A = \frac{Pe^2}{2l}$, da nun zur Bestimmung von e $M_c = M_A$ gesetzt werden muss, so erhält man: $\frac{Pe^2}{2l} = \frac{Pl(l-2e)^2}{8(l-e)^2}$, woraus $e = 0{\cdot}293\,l$ folgt. Diese Strecke e kann man auch durch Construction finden: Man halbiert $A_1 B$ in C_1, zieht $C_1 D \perp A_1 B$, macht $C_1 D = C_1 B$ und $BA = BD$, dann ist $AC_1 = AB - \frac{l}{2} = BD - \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{l^2}{2}} - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}(\sqrt{2}-1)$, und da $e = A_1 B - DB = l - \sqrt{\frac{l^2}{2}}$ ist, so hat man: $e = l - \frac{l}{\sqrt{2}} = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{\cdot}293\,l$, wie oben. Die gleichzeitig erhaltene Strecke AC_1 ist diejenige Entfernung, in welcher beide Stützen von den Enden des Trägers entfernt nach innen angeordnet werden müssten, wenn der Balken symmetrisch inbezug seiner Mitte unterstützt und auf seine ganze Länge gleichmäßig belastet, ein Maximum tragen können soll, ein Fall, der schon in Beispiel 34 behandelt wurde. Das größte Moment im vorliegenden Falle ist M_A oder M_c, weil $M_A = M_c$ ist. Zur Querschnittsbestimmung hat man:

$M_A = \frac{Pe^2}{2l} = \frac{(0{\cdot}293\,l)^2 P}{2l} = 0{\cdot}0429\,Pl$ und weil $Z = \frac{M_A}{\mathfrak{S}} = \frac{0{\cdot}0429\,Pl}{\mathfrak{S}}$ ist, so folgt daraus: $P = \frac{23\,\mathfrak{S}Z}{l}$, die Tragkraft ist also nahezu dreimal so groß, als wenn die Stützen an den Enden stehen, in welchem

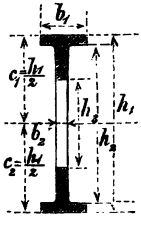
letzteren Falle $P = \frac{8 \mathfrak{S} Z}{l}$ ist. Auch hier hat die elastische Linie einen Wendepunkt, denn das Moment in A ist, von links aus gebildet, negativ, im Punkte C positiv, ein gusseiserner Träger ist also auch hier nicht mit Vortheil anwendbar.

37) Ein prismatischer, schmiedeiserner Balken von quadratischem Querschnitte, mit der Quadratseite $s = 100\,mm$, trägt eine ihn auf Biegung beanspruchende Last mit einer zweifachen Bruchsicherheit; es soll dieser Balken durch einen anderen schmiedeisernen von kreisförmigem Querschnitte ersetzt werden, der sechsfache Bruchsicherheit gewährt, wie groß ist der Durchmesser dieses zweiten Balkens zu machen?

A. Das Biegungsmoment wird für beide Balken als gleich vorausgesetzt. Für den ersten Balken ist $M = \frac{s^3 \mathfrak{S}}{6}$; für den zweiten Balken ist $M = \frac{\pi d^3}{32} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{3}$ daher $\frac{\pi d^3}{32} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{3} = \frac{s^3 \mathfrak{S}}{6}$, woraus $d = 171\,mm$ folgt.

38) Eine an einer verticalen Wand befestigte Lagerconsole wird in einer Entfernung $l = 1\,m$ vom Befestigungspunkte durch einen Druck $P = 450\,kg$ auf Biegung beansprucht. Es sind die Dimensionen des gefährlichen Querschnittes (Befestigungsstelle), dessen Form in Fig. 66 ersichtlich ist, zu berechnen.

Fig. 66.



A. Der Querschnittsmodul dieses Querschnittes ist: $Z = \frac{b_1 (h_1^3 - h_2^3) + b_2 (h_2^3 - h_3^3)}{6 h_1} = \frac{Pl}{\mathfrak{S}}$; da in dieser Gleichung 5 Unbekannte vorkommen, so machen wir folgende Annahmen:

$$b_1 = \frac{h_1}{4}, \quad h_2 = 0{\cdot}9\, h_1, \quad b_2 = 0{\cdot}05\, h_1, \quad h_3 = \frac{h_1}{2},$$

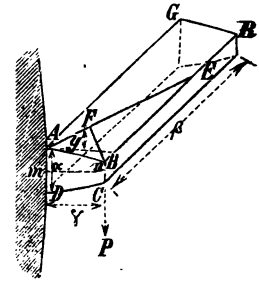
mit diesen Werten erhält man: $0{\cdot}016325\, h_1^3 = \frac{Pl}{\mathfrak{S}}$, woraus, die gegebenen Zahlenwerte, sowie $\mathfrak{S} = 2$ eingesetzt, $h_1 = 293{\cdot}4 \backsim 240\,mm$ folgt, womit die übrigen Querschnittsdimensionen gefunden werden können.

39) Durch zwei in einander greifende, gusseiserne Zahnräder wird von einer Transmissionswelle, welche $u = 40$ Umdrehungen pro Minute macht, eine Arbeit von $N = 20$ Pferdekräften auf die zweite Welle übertragen, der Theilkreishalbmesser des Rades, welches 40 Umdrehungen macht, ist $R = 900\,mm$. Es sind die Querschnittsdimensionen eines Zahnes zu berechnen.

A. Der Zahn eines Stirnrades kann annähernd als ein prismatischer Körper angesehen werden, der an dem einen Ende (am Radkranze) eingemauert und in einer gewissen Entfernung von diesem Ende durch eine Kraft (Zahndruck) auf Biegung beansprucht wird. Obzwar im allgemeinen die Kraft P im Theilkreise des Rades angreift, so ist es doch nöthig, den denkbar ungünstigsten Fall der Angriffsweise der Kraft P anzunehmen; das ist der, dass die Kraft am

Ende des Zahnes in einer Ecke desselben angreift. Die radial gemessene Länge des Zahnes $ABCD$ (s. Fig. 67) sei $mn = \gamma$, die Höhe des Zahnes, auch Zahnstärke genannt, sei $\alpha = AD$, die Breite des Zahnes sei $AG = \beta$. Angenommen, ein eventueller Bruch des Zahnes erfolge in der Linie AE, deren Länge vorläufig noch ganz unbestimmt ist. Für die Bruchstelle AE ist das Moment der Kraft $P \,.\, \overline{BF} = \frac{\overline{AE} \,.\, \overline{AD}^2 \,.\, \mathfrak{S}}{6}$, oder $P \,.\, \overline{AB} \sin y =$ $= \frac{\overline{AB} \,.\, \overline{AD}^2 \,\mathfrak{S}}{6 \cos y}$, woraus $P = \frac{\alpha^2 \mathfrak{S}}{6 \cos y \sin y}$ folgt.

Fig. 67.



Aus dieser Gleichung folgt, dass die Bruchstelle AE eine solche Lage, also der Winkel y eine solche Größe haben werde, dass für denselben P ein Minimum, oder $\cos y \,.\, \sin y$ ein Maximum wird; dieses ist, wie eine kleine Rechnung zeigt, dann der Fall, wenn $\sphericalangle y = 45^0$ ist, dann findet man: $\alpha = \sqrt{\frac{3P}{\mathfrak{S}}}$. Denkt man sich den Zahndruck P nicht in der Ecke, sondern in der Mitte der Kante BR angreifend, so hat man zur Querschnittsbestimmung des Zahnes die Gleichung: $P\gamma = \frac{\mathfrak{S}\beta\alpha^2}{6}$, oder $\gamma = \frac{3}{2}\alpha$ gesetzt: $\alpha = 3\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}}$, für $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3}$, erhält man auch wieder wie oben $\alpha = \sqrt{\frac{3P}{\mathfrak{S}}}$. Gewöhnlich nimmt man im Maschinenbau $\frac{\alpha}{\beta} =$ $= \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{6}$, und zwar ersteren Wert für Räder bis zu $\frac{1^m}{2}$ Theilkreisgeschwindigkeit, letzteren für Triebwerksräder mit größerer Umfangsgeschwindigkeit. Den Zahndruck P findet man aus der Gleichung $N = \frac{Pv^m}{75}$, wo v die Umfangsgeschwindigkeit des Rades im Theilkreise ist; mit $v = \frac{\pi R^m u}{30}$ ist $N = \frac{P\pi R^m u}{75 \,.\, 30}$, woraus, die Zahlenwerte eingesetzt, $P = 398{\cdot}08 \backsim 400^k$ folgt.

Den Halbmesser R anstatt in Metern in Millimetern, den Wert von P in die Formel für α, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{6}$ und $\mathfrak{S} = 1{\cdot}5$ eingesetzt, erhält man: $\alpha = 846{\cdot}33\sqrt{\frac{N}{Ru}}$, hieraus findet man $\alpha = 20\,mm$, $\beta = 120\,mm$ und $\gamma = 30\,mm$.

40) Auf eine Handkurbel von $400\,mm$ Länge wirke ein Druck von $P = 50\,kg$, ein auf der Kurbelwelle aufzukeilendes Rad von $Z = 20$ Zähnen soll die Kraft auf die nächste Welle übertragen, man fragt nach den Querschnittsdimensionen eines Zahnes.

A. Im vorigen Beispiele fanden wir:

$$\alpha = 3\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{\alpha}{\beta}} = 3\sqrt{\frac{PR}{\mathfrak{S}R} \cdot \frac{\alpha}{\beta}},$$

in den rechten Theil dieser Gleichung die Werte $R = \frac{Zt}{2\pi}$ (t = Theilung des Rades = $2{\cdot}1\,\alpha$), $PR = M$ eingeführt und α bestimmt, erhält man: $\alpha = 3\sqrt[3]{\frac{M}{\mathfrak{S}Z} \cdot \frac{\alpha}{\beta}}$, oder $P = 50$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4}$, $\mathfrak{S} = \frac{9}{4}$ und $M = 50 \,.\, 400 = 20.000$ eingesetzt, gibt $\alpha = 14{\cdot}42\,mm$; hiermit wird $t = 2{\cdot}1\,\alpha = 30{\cdot}28$, diese Zahl so abgerundet, dass sie durch π theilbar ist, also $\frac{t}{\pi} = \frac{31{\cdot}4}{3{\cdot}14} = 10$, so ist $R = \frac{Zt}{2\pi} = \frac{20}{2} \,.\, 10 = 100\,mm$; hiermit wird die verbesserte Zahnstärke $\alpha = \frac{t}{2{\cdot}1} = \frac{31{\cdot}4}{2{\cdot}1} = 15$ und $\beta = 4\,\alpha = 60\,mm$.

41) Durch zwei in einander greifende Zahnräder wird von einer Transmissionswelle auf eine zweite eine mechanische Arbeit von $N = 30$ Pferdekräften übertragen, das kleinere Rad soll $Z = 60$ Zähne haben und $u = 96$ Umdrehungen pro Minute machen; man fragt nach den Querschnittsdimensionen eines Zahnes.

A. Setzt man in die Gleichung für die Zahnstärke $\alpha = 3\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{\alpha}{\beta}}$, für P den Wert $P = \frac{716560\,N}{Ru}$, (R in Millimetern) $R = \frac{Zt}{2\pi}$, $t = 2{\cdot}1\,\alpha$ ein und bestimmt α, so erhält man: $\alpha = 268\sqrt{\frac{N}{Zu\mathfrak{S}} \cdot \frac{\alpha}{\beta}}$, setzt man hierin $\mathfrak{S} = \sqrt[3]{v}$ (v = Umfangsgeschwindigkeit des Rades), $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3\sqrt{v}}$, ferner für N, Z und u die Zahlenwerte ein, so erhält man $\alpha = 22\frac{1}{3}\,mm$, daher $t = 2{\cdot}1 \,.\, 22\frac{1}{3} = 46{\cdot}9 \backsim 47\,mm$; der Halbmesser R des Rades wird $R = \frac{Zt}{2\pi} = \frac{60}{2} \cdot \frac{47}{3{\cdot}14} = 450\,mm$; die Umfangsgeschwindigkeit ist $v = \frac{\pi R u}{30} = \frac{3{\cdot}14 \,.\, 0{\cdot}45 \,.\, 96}{30} = 4{\cdot}52\,m$, $\beta = 3\,\alpha\sqrt{v} = 3 \,.\, 22\frac{1}{4}\sqrt{4{\cdot}52} = 143\,mm$.

42) Ein Zahnrad vom Halbmesser $R = 500\,mm$ soll bei $u = 60$ Umdrehungen pro Minute $N = 20$ Pferdekräfte übertragen; welche Querschnittsdimensionen erhalten die Arme an der Nabe, wenn ihre Anzahl $i = 6$ ist? Der Querschnitt eines Armes sei ein Rechteck von der Höhe h und der Breite $b = \frac{h}{5}$.

A. Der Arm eines Zahnrades wird durch den im Theilkreise wirkenden Zahndruck P auf Biegung beansprucht, er ist als ein stabförmiger Körper anzusehen, der an dem einen Ende (an der Nabe) eingespannt und am anderen, frei gedachten Ende (am Kranze) durch die Kraft P auf Biegung beansprucht wird; auch wird vorausgesetzt, dass der Querschnitt des Armes auf seiner ganzen Länge constant sei. Obzwar die Länge eines Armes um den Halbmesser der Randnabe kleiner ist als der Theilkreishalbmesser des Rades, so setzen wir doch der Einfachheit der Rechnung wegen das den Arm biegende Moment $M = \frac{PR}{i}$. Aus den Gleichungen $N = \frac{Pv}{75}$

und $v = \frac{\pi R u}{30}$ folgt der Zahndruck $P = \frac{30 \cdot 75\, N}{\pi R u} = \frac{30 \cdot 75 \cdot 20}{3{\cdot}14 \cdot 0{\cdot}5 \cdot 60} = 477{\cdot}7\, kg$, das Biegungsmoment ist $M = \frac{RR}{i} = \frac{477{\cdot}7 \cdot 500}{6} = 39808{\cdot}33$, da aber $M = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$ und $b = \frac{h}{5}$ ist, so hat man: $h = \sqrt[3]{\frac{30\,M}{\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{30 \cdot 39808{\cdot}33}{2}} = 84{\cdot}2\, mm$, hiermit wird $b = \frac{h}{5} = \frac{84{\cdot}2}{5} = 16{\cdot}84 \sim 17\, mm$.

43) Eine Riemenscheibe, deren Halbmesser $R = 400\, mm$ ist, macht pro Minute $u = 60$ Umdrehungen und überträgt $N = 12$ Pferdekräfte; welche Querschnittsdimensionen erhalten die Arme, wenn deren Zahl $= 4$ ist und die Querschnittsform eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{h}{2}$ und $\frac{h}{4}$ ist?

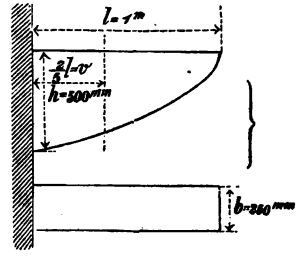
A. Aus den Gleichungen für N und v (s. das frühere Beispiel) folgt der Zahndruck $P = \frac{30 \cdot 75\, N}{\pi R u}$, oder die Zahlenwerte eingesetzt und P bestimmt: $P = 358\, kg$. Das einen Arm biegende Moment ist $\frac{PR}{4} = \frac{358 \cdot 400}{4} = 35.800$, der Querschnittsmodul ist $Z = \frac{\pi b h^2}{32} = \frac{\pi h^3}{64}$, man erhält daher aus der Gleichung $\frac{PR}{4} = \frac{\mathfrak{S} \pi h^3}{64}$ die große Achse der Ellipse:

$$h = \sqrt[3]{\frac{64\,PR}{4\,\mathfrak{S}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{64 \cdot 358 \cdot 400}{4 \cdot 2 \cdot 3{\cdot}14}} = 71{\cdot}45 \sim 72,$$

womit $b = 36\, mm$ sich ergibt.

44) Welche Last kann eine Console aus Sandstein an ihrem äußeren Ende tragen, wenn das eigene Gewicht berücksichtigt werden soll? Der Querschnitt an der Einmauerungsstelle ist ein Rechteck von $250\, mm$ Breite und $500\, mm$ Höhe, der verticale Längenschnitt der Console wird von einer Parabel begrenzt, die freie Länge des Trägers ist $l = 1\, m$ (Fig. 68).

Fig. 68.



A. Die hier anzuwendende Festigkeitsformel ist: $Pl + Gv = \frac{b h^2 \mathfrak{S}}{6}$, in welcher Gleichung G das Gewicht des Steines und v die Entfernung seines Schwerpunktes von der Einmauerungsstelle bedeuten. Es ist $v = \frac{2}{5} l = \frac{2}{5} \cdot 1000 = 400\, mm$, $G = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2{\cdot}5 \cdot 2 \cdot 1 = 166\, kg$ (Dichte des Steines $= 2$ gesetzt). Die Festigkeitsgleichung nach der Unbekannten P aufgelöst, gibt, wenn man die Zahlenwerte einsetzt und P bestimmt: $P = 1183{\cdot}6\, kg$.

45) Ein schmiedeiserner Balken, der an einem Ende eingemauert und am anderen freien Ende mit $P = 500\, kg$, sowie auf seiner ganzen freien Länge von $l = 1{\cdot}5\, m$ mit $G = 680\, kg$ gleichmäßig belastet ist, soll durch Eisenbahnschienen von $105\, mm$ Höhe

ersetzt werden; man fragt, wieviel solcher Eisenbahnschienen, horizontal neben einander gelegt und entsprechend mit einander verbunden, braucht man?

A. Der Querschnittsmodul des ganzen Trägers ist

$$Z = \frac{M}{\mathfrak{S}} = \frac{Pl + \frac{Gl}{2}}{\mathfrak{S}} = \frac{500 \cdot 150 + \frac{680 \cdot 150}{2}}{700}, \text{ oder } Z = 180.$$

Der Querschnittsmodul einer Eisenbahnschiene von 105 *mm* Höhe ist laut Profiltafel der „Hütte" auf Centimeter bezogen, $Z = 90$, daher die Anzahl der nöthigen Eisenbahnschienen $x = \frac{180}{90} = 2$.

46) Ein schmiedeiserner I-Träger liegt mit seinen beiden Enden frei auf zwei Stützen auf; seine ganze freie Länge von $l = 4{\cdot}3\,m$ ist gleichmäßig mit $P = 5700\,kg$ belastet, welches Profil laut I-Eisentabelle (s. Schluss dieses Abschnittes) erhält der Träger?

A. Der nöthige Querschnittsmodul ist $Z = \frac{Pl}{8\mathfrak{S}} = \frac{5700 \cdot 430}{8 \cdot 700} = 437{\cdot}5$, diesen Werten genügt das Profil Nr. 28 und der Querschnitt (s. Fig. 69) erhält folgende Dimensionen:

$$h = 260\,mm,\ d = 12\tfrac{1}{2}\,mm,\ b = 97\tfrac{3}{4}\,mm,\ t = 15\,mm.$$

Fig. 69.

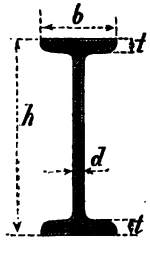
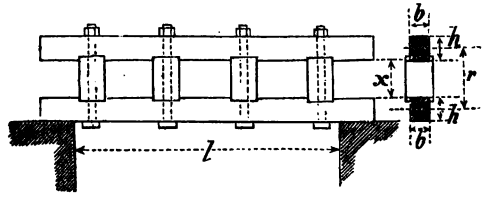


Fig. 70.



47) Zwei über einander liegende Balken, von denen jeder einen rechteckigen Querschnitt mit den Dimensionen b und h hat und in gleichen Abständen durch Bolzen und eingelegte Querstücke miteinander fest verbunden sind, liegen mit ihren Enden frei auf und haben in der Mitte der Länge eine Last P zu tragen (s. Fig. 70), die freie Länge der Balken sei l, man fragt, wie groß ist die Entfernung x der beiden Balken zu machen, damit die Tragkraft des Doppelbalkens n-mal größer werde, als die Tragkraft der beiden unmittelbar auf einander liegenden Balken?

A. Die Tragkraft P_1 der zwei unmittelbar aufeinander liegenden Balken ergibt sich aus der Gleichung $\frac{P_1 l}{4} = \frac{b}{6}(2h)^2\mathfrak{S}$, woraus $P_1 = \frac{8bh^2\mathfrak{S}}{3l}$ folgt. Haben aber die beiden Balken die Entfernung x von einander, so ist das Trägheitsmoment des Querschnittes $J = \frac{1}{12}b(x + 2h)^3 - \frac{bx^3}{12}$. Die Entfernung c der äußersten Faserschichte von der neutralen Schichte ist $c = \frac{x + 2h}{2}$, womit sich nach

entsprechender Reduction der Querschnittsmodul mit

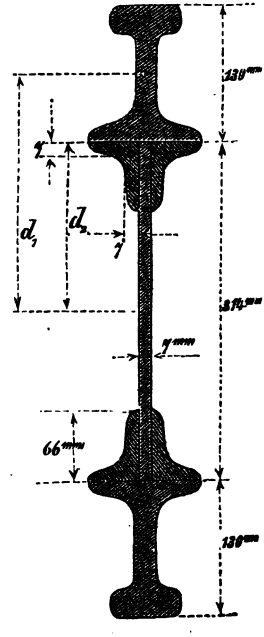
$$Z = \frac{hb}{3}\left(\frac{3x^2 + 6hx + 4h^2}{x + 2h}\right)$$

ergibt. Diesen Wert von Z in die Gleichung $\frac{Pl}{4} = \mathfrak{S} Z$ eingesetzt und P bestimmt, gibt: $P = \frac{4hb\mathfrak{S}}{3l}\left(\frac{3x^2 + 6hx + 4h^2}{x + 2h}\right)$; der Aufgabe gemäß soll $\frac{P}{P_1} = n$ sein; für P und P_1 die Werte gesetzt und x bestimmt, gibt: $x = -\frac{h(3-n)}{3} \pm \sqrt{\frac{h^2(3-n)^2}{9} + \frac{4h^2(n-1)}{3}}$, hier kann nur das positive Vorzeichen der Wurzel gebraucht werden.

Es sei z. B. $n = 3$, so ergibt sich $x = 163{\cdot}49\,mm$; wenn also die Balken in dieser Entfernung von einander durch Querstücke und Schraubenbolzen fest mit einander verbunden werden, so ist die Tragkraft dieses Balkens dreimal so groß, als wenn die Balken unmittelbar auf einander liegen, also $P = 3P_1 = \frac{8bh^2\mathfrak{S}}{l}$, mit $b = 50\,mm$, $h = 100\,mm$, $l = 2\,m$ und $\mathfrak{S} = 0{\cdot}5$ für Holz, wird die Tragkraft des zusammengesetzten Balkens $P = \frac{8 \cdot 50 \cdot (100)^2 \cdot 0{\cdot}5}{2000} = 1000\,kg$; die letzte Gleichung für P ist zur Berechnung von h und b zu benutzen.

48) Ein prismatischer Balken, der aus zwei Eisenbahnschienen, einer verticalen Blechwand und vier Winkeleisen gebildet ist (s. Fig. 71), ruht mit seinen Enden auf zwei Stützen auf; es ist die Entfernung l der Unterstützungspunkte zu bestimmen, wenn der Balken gleichmäßig auf seine ganze Länge mit $1600\,kg$ pro laufenden Meter belastet werden soll und die Querschnittsdimensionen die in der Figur angegebenen sind. Das Trägheitsmoment einer Eisenbahnschiene ist $J = 924$, der Querschnittsmodul derselben ist $Z = 140$, der Flächeninhalt des Querschnittes ist $F = 43\,cm^2$.

Fig. 71.



A. Hier ist die Formel anzuwenden $\frac{Gl}{8} = \mathfrak{S} Z$, wo $G = ql$ ist; für l in Centimetern bezeichnet q die Belastung auf $1\,cm$ Länge, daher $l^{cm} = \sqrt{\frac{8\mathfrak{S}Z}{q}}$.

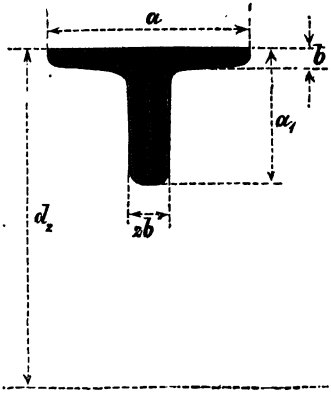
Das Trägheitsmoment J des ganzen Querschnittes, bezogen auf die horizontale Schwerachse, setzt sich zusammen aus den Trägheitsmomenten $2i$ der beiden Schienen, $2i_2$ der beiden Paare von Winkeleisen und dem Trägheitsmomente i_3 der verticalen Blechwand, sämmtlich bezogen auf die horizontale Schwerachse des ganzen Querschnittes. Nach der Figur ist:

$$i_1 = i' + d_1^2 f_1 = 924 + (6{\cdot}6 + 15{\cdot}7)^2 \cdot 43 = 22307{\cdot}47$$

(i' = Trägheitsmoment eines Schienenquerschnittes, bezogen auf die eigene Schwerachse).

$i_2 = i'' + d_2^2 f_2$ (s. Fig. 72); es ist aber $i'' = \frac{b}{3}[2a_1^3 + b^2(a - 2b)]$, die Zahlenwerte eingesetzt und ausgerechnet:

Fig. 72.



$$i'' = 135{\cdot}1042, \quad d_2 = 15{\cdot}7\,cm,$$
$$f_2 = b(2a_1 + a - 2b),$$

oder in Zahlen ausgerechnet: $f_2 = 14{\cdot}98\,cm^2$; hiermit erhält man:

$$i_2 = 135{\cdot}1042 + (15{\cdot}7)^2 . 14{\cdot}98 = 3827{\cdot}5242,$$

$$i_3 = \frac{1}{12} . 0{\cdot}7\,(31{\cdot}4)^3 = 1805{\cdot}95,$$ somit ergibt sich:

$$J = 2(i_1 + i_2) + i_3 = 2(22307{\cdot}47 + 3827{\cdot}5242) + 1805{\cdot}95,$$
$$J = 54075{\cdot}9384,$$
$$c = 13 + 15{\cdot}7 = 28{\cdot}7\,cm,$$ demnach ist:

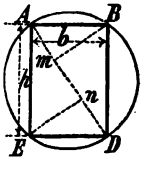
$$Z = \frac{J}{c} = \frac{54075{\cdot}9384}{28{\cdot}7} = 1884{\cdot}179,$$

diesen Wert von Z, sowie $\mathfrak{S} = 600$, $q = 16$, bezogen auf eine Längeneinheit $= 1\,cm$, in obige Formel für l eingesetzt, gibt:

$$l^{cm} = \sqrt{\frac{8 . 600 . 1884{\cdot}179}{16}} = 751{\cdot}8\,cm.$$

49) Aus einem auf Biegung beanspruchten Cylinder vom Durchmesser $d = 300\,mm$ soll ein Balken größter Tragkraft von rechteckigem Querschnitte hergestellt werden; man fragt nach den Dimensionen b und h des Rechteckquerschnittes.

Fig. 73.



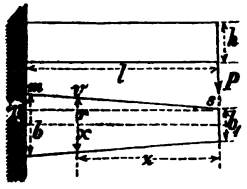
A. Das den Balken biegende Moment ist $M = \frac{bh^2\mathfrak{S}}{6}$, soll die Tragkraft ein Maximum werden, so muss $\frac{bh^2}{6}$ oder bh^2 ein Maximum werden. Aus Fig. 73 ist ersichtlich, dass, weil die Diagonale des Rechteckes zusammenfällt mit dem Durchmesser des Kreises, $h^2 = d^2 - b^2$, daher $b(d^2 - b^2) =$ Maximum werden muss; dieses ist dann der Fall, wenn $d^2 - b^2 = 2b^2$ ist, woraus $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ und $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, also $\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oder angenähert $\frac{b}{h} = \frac{5}{7}$, somit $b = 173{\cdot}2\,mm$ und $h = 245\,mm$ folgt.

Die geometrische Construction des Rechteckes von den Seiten b und h aus dem Kreise vom Durchmesser d geschieht wie folgt: Man zieht einen beliebigen Durchmesser AD, theilt diesen in drei gleiche Theile, errichtet in den Theilpunkten m und n Senkrechte auf AD und verbindet die Durchschnittspunkte E und B dieser Senkrechten mit dem Umfange des Kreises mit den Punkten A und D.

50) Ein stabförmiger Körper aus Gusseisen, dessen Querschnitte Rechtecke von veränderlicher Höhe und constanter Breite sind, ist mit dem dickeren Ende in horizontaler Lage eingemauert und am

anderen Ende durch eine Last P auf Biegung beansprucht. Die Abmessungen des Querschnittes an der Befestigungsstelle sind: $b = 100$, $h = 200$, am freien Ende des Stabes ist $b = 100$, $h_1 = 100$; die Länge l des Stabes ist $l = 2000\,mm$; man fragt: 1. Wo ist der gefährliche Querschnitt? 2. Wie groß ist die Tragkraft P dieses Balkens?

Fig. 74.



A. Angenommen, es sei in der Entfernung z vom freien Ende des Körpers (s. Fig. 74) der gefährliche Querschnitt von der Höhe x, so ist für diesen Punkt das Biegungsmoment: $Pz = \frac{\mathfrak{S} b x^2}{6}$, es muss daher für diesen Punkt P ein Minimum werden und man fragt nun, für welchen Wert von z wird P ein Minimum? Da $\frac{\mathfrak{S} b}{6}$ constant ist, so braucht nur der Ausdruck $\frac{x^2}{z}$ zu einem Minimum zu werden. Die Rechnung ergibt *), dass P ein Minimum wird, wenn $z = \frac{h_1 l}{h - h_1}$ ist, hiermit erhält man, wenn man in den für x geltenden Wert $x = \frac{(h - h_1) z + h_1 l}{l}$ (folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke sac und smn) den Wert für z einsetzt, $x = 2h_1$; die Werte von x und z in die Gleichung $P = \frac{\mathfrak{S} b x^2}{6z}$ eingesetzt, gibt: $P = \frac{2}{3} \cdot \frac{b h_1 \mathfrak{S} (h - h_1)}{l}$, oder Zahlenwerte eingesetzt und ausgerechnet: $P = 833\frac{1}{3}\,kg$.

Für den Fall, dass der gefährliche Querschnitt an der Einmauerungsstelle ist, muss $z = l$ sein, woraus $h_1 = \frac{h}{2}$ folgt, was im vorliegenden Beispiele auch der Fall ist. Wir finden hier $z = l$ und dementsprechend $P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$, also wie beim prismatischen Körper. Wäre jedoch die Höhe aller Querschnitte constant und die Breite veränderlich, so ist der gefährliche Querschnitt an der Einmauerungsstelle, das heißt es ist $z = l$ und $x = b$, wenn x die veränderliche Breite und b die Breite an der Einmauerungsstelle ist. Die Tragkraft ist ebenso groß, wie früher $P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6l}$; wäre aber die Breite des Balkens am freien Ende = Null, so findet man $\mathfrak{S} = \frac{6Pl}{bh^2}$, also constant, weil unabhängig von der Veränderlichen z, daher hat der Körper in diesem Falle, wenn der Grundriss ein Dreieck ist, die Form der gleichen Festigkeit.

51) Dieselbe Aufgabe wie in Nummer 50, jedoch mit dem Unterschiede, dass alle Querschnitte des Balkens ähnliche Rechtecke sind. Die Abmessungen der Querschnitte an der Befestigungsstelle und am freien Ende sind:

$$b = 180\,mm, \quad h = 360\,mm,$$
$$b_1 = 120\,mm, \quad h_1 = 240\,mm.$$

*) Siehe Näheres: Graf, „Festigkeitslehre“, S. 298 (Spielhagen und Schurich, Wien).

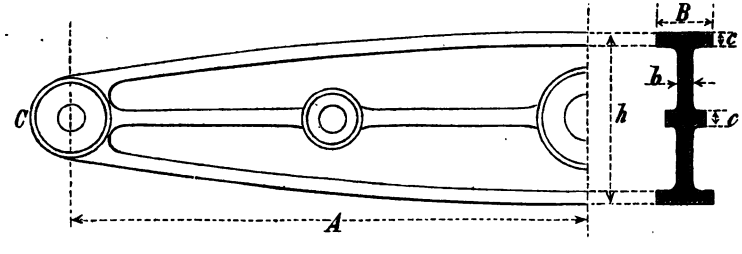
A. Die Dimensionen des gefährlichen Querschnittes seien x und y, also sein Biegungsmoment in der Entfernung z vom freien Ende $Pz = \frac{\mathfrak{S} x y^2}{6}$, die Werte von x und y durch z und andere, gegebene, constante Größen ausgedrückt, findet man:

$$x = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l},\quad y = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l} \cdot \frac{h}{b},$$ hiermit wird

$$P = \frac{[b_1 l + (b - b_1) z]^3}{z} \cdot \frac{\mathfrak{S} h^2}{6 b^2 l^3},$$ dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn $\frac{[b_1 l + (b - b_1) z]^3}{z}$ = Minimum wird; die Rechnung ergibt, dass dieser Ausdruck, also auch P ein Minimum wird, wenn $z = \frac{b_1 l}{2 (b - b_1)}$ ist; hiermit erhält man $x = \frac{3 b_1}{2}$, $y = \frac{3 h b_1}{2 b}$ und $P = \frac{9 \mathfrak{S} b_1^2 h^2 (b - b_1)}{8 b^2 l}$. Wenn $z = l$ wird, der gefährliche Querschnitt also an der Einmauerungsstelle ist, so ergibt sich $b_1 = \frac{2 b}{3}$, für diesen Wert ist $P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$, wie beim prismatischen Balken, was auch im vorliegenden Zahlenbeispiele der Fall ist. Man findet auch $z = l = 2000\,mm$ und $P = \frac{2 \cdot 5 \,.\, 180 \,.\, (360)^2}{6 \,.\, 2000} = 4860\,kg$.

52) Es sind die Festigkeitsdimensionen eines gusseisernen, gleicharmigen Balanciers für eine 60pferdige Dampfmaschine aus folgenden Angaben zu berechnen: Die den Balancier auf Biegung beanspruchende Kraft in der Kolbenstange ist $P = 7234\,kg$, die

Fig. 75.



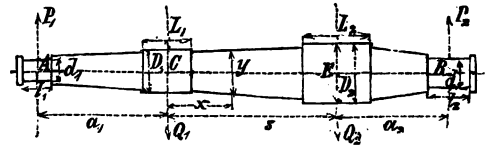
ganze Länge des Balanciers ist $2A = 3{\cdot}6\,m$, der Querschnitt ist doppel-T-förmig mit in der Mitte der Höhe horizontal angesetzten Rippen (s. Fig. 75).

A. Die Arme eines Balanciers (zweiarmiger Hebel) sind als zwei Balken anzusehen, von denen jeder an einem Ende eingemauert und am anderen Ende durch eine Kraft P auf Biegung beansprucht wird; die Einmauerungsstelle ist der Drehpunkt des Hebels. Um den Balancier als einen Körper von der Form der gleichen Festigkeit herzustellen, begrenzt man das Längenprofil des Balanciers durch Parabelbögen. Wir berechnen zuerst den Querschnitt des Balanciers in der Mitte seiner Länge und nehmen vorläufig an, als ob dieser Querschnitt ein massives Rechteck wäre, und setzen den Quer-

schnittsmodul desselben gleich dem Querschnittsmodul des doppel-T-förmigen Querschnittes mit Hinweglassung der in der Mitte der Höhe befindlichen Rippe, da diese, weil in der Nähe der neutralen Faserschichte gelegen, doch nur sehr wenig zur Tragkraft, sondern mehr zur Versteifung des Balanciers beiträgt. Die Dimensionen des Rechteckes seien b_0 und h, man hat dann die Gleichung: $\frac{b_0 h^2}{6} = \frac{1}{6}\left[\frac{B h^3 - (B-b)(h-2c)^3}{h}\right]$, woraus mit geringer Vernachlässigung $\frac{b_0}{b} = 1 + 6\left(\frac{c}{h}\right)\left[1 - 2\left(\frac{c}{h}\right)\right]\left(\frac{B}{b} - 1\right)$ folgt; das zweite Glied des rechten Theiles $= a$ gesetzt: $\frac{b_0}{b} = 1 + a$, woraus $b = \frac{b_0}{1+a}$ folgt. In dieser Formel muss man für die Verhältnisse $\frac{c}{h}$ und $\frac{B}{b}$ passende, der praktischen Ausführung entsprechende Wert annehmen. Wir berechnen zunächst die Dimensionen b_0 und h des Rechteckes, indem wir h nach der empirischen Formel $h = \frac{2}{5} A$ nehmen, wobei A die Armlänge des Balanciers bedeutet; es ist also hier $h = \frac{2}{5} . 180 = 72\,cm$.

Aus der Gleichung $PA = \frac{\mathfrak{S} b_0 h^2}{6}$ findet man: $b_0 = \frac{6PA}{\mathfrak{S} h^2}$, oder $b_0 = \frac{6 . 7234 . 180}{200 . (72)^2} = 7{\cdot}5\,cm$, nehmen wir $\frac{c}{h} = \frac{1}{16}$, $\frac{B}{b} = 2{\cdot}5$, so findet man $\frac{1}{1+a} = 0{\cdot}67$ und $b = 0{\cdot}67\, b_0 = 0{\cdot}67 . 7{\cdot}5 = 5\,cm$; hiermit wird $c = \frac{72}{16} = 4{\cdot}5\,cm$, $B = 2{\cdot}5 . 5 = 12{\cdot}5\,cm$, die horizontale Mittelrippe erhält auch die Breite $B = 125\,mm$, oder etwas weniger, etwa $115\,mm$ und die Dicke $c = 45\,mm$. Die Höhe h_1 am Ende des Balanciers würde, weil in diesem Punkte das Biegungsmoment $= \emptyset$ ist, auch $= \emptyset$ werden; allein die in diesem Punkte auftretende, lothrechte Schubkraft P ruft eine Schubspannung $\mathfrak{S} = \frac{3P}{2Bh_2}$ hervor, wenn B und h_2 die Dimensionen des massiven Rechteckes im Punkte C sind; hieraus erhält man: $h_2 = \frac{3P}{2B\mathfrak{S}} = \frac{3 . 7234}{2 . 12{\cdot}5 . 200} = 4{\cdot}34\,cm$; da man aber durch das Balancier-Ende einen Doppelzapfen hindurchstecken muss, an welchem andere Theile angreifen, so muss man die Höhe h_1 am Ende des Balanciers aus dem Durchmesser d_1 des durchzusteckenden Zapfens bestimmen. Die Dicke d_2 eines der Doppelzapfen ist $d_2 = 1{\cdot}13\sqrt{\frac{P}{2}} = 1{\cdot}13\sqrt{\frac{7234}{2}} = 68\,mm$, nehmen wir die Dicke d_3 des im Balancierkopf fest steckenden Zapfentheiles aus praktischen Gründen $d_3 = 76\,mm$ an, so ergibt sich die Höhe $h_1 = 2\,d_2 + d_3 = 2 . 68 + 76 = 212\,mm$. Nun bleibt noch die Schwingungsachse des Balanciers zu berechnen

Fig. 76.



übrig. Diese Achse ist gleichschenklig, einfachtragend, ihre Länge zwischen den Zapfenmitteln sei $l = 750\,mm$ angenommen. Die von der Achse zu tragende Last ist $2P$, mehr dem Gewichte G des Balanciers, letzteres bestimmt sich nach der empirischen Formel $G = 0{\cdot}076\,A^m\,P^k = 0{\cdot}076 \,.\, 1{\cdot}8 \,.\, 7234 = 989{\cdot}6 \backsim 990^k$; hiermit ist die ganze von der Achse zu tragende Last: $Q = 2 \,.\, 7234 + 990 = 15458\,kg$. Die Dicke D_0 des Achskopfes (s. Fig. 76) findet man aus: $\frac{Ql}{4} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} D_0^3$ mit $D_0 = \sqrt[3]{\frac{8\,Ql}{\mathfrak{S}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8 \,.\, 15458 \,.\, 750}{12 \,.\, 3{\cdot}14}} = 135\,mm$; hierbei ist Gusstahl als Achsenmaterial vorausgesetzt. Der Durchmesser der beiden Endzapfen wird:

$$d_1 = 2{\cdot}26 \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}} \,.\, \frac{l_1}{d_1}} = 2{\cdot}26 \sqrt{\frac{7729}{12} \,.\, 1{\cdot}4} = 68\,mm.$$

Die Zapfenlänge wird $l_1 = 1{\cdot}4 \,.\, 68 = 95\,mm$; jeder der beiden Achsschenkel erhält die Form eines abgestumpften Kegels, dessen größerer Durchmesser $D = D_0 \sqrt[3]{\frac{x}{a_1}}$ ist, hierbei ist $x = \frac{l - L}{2}$, wobei L die Länge des Achskopfes bedeutet, die wir hier mit $L = 350\,mm$ annehmen, die Nabenlänge sei $L_1 = 310\,mm$, es ist $a_1 = \frac{l}{2} = \frac{750}{2} = 375\,mm$; man erhält nun:

$$D = D_0 \sqrt[3]{\frac{\frac{l-L}{2}}{\frac{l}{2}}} = 135 \sqrt[3]{\frac{750 - 350}{750}} = 109{\cdot}48 \backsim 110\,mm.$$

Der Durchmesser D_1 des dünneren Endes des Achsschenkels ist um die doppelte Anlaufhöhe e des Zapfens größer als der Zapfendurchmesser selbst; es ist aber $e = 3\,mm + 0{\cdot}07\,d_1 = 3 + 0{\cdot}07 \,.\, 68 = 7\frac{3}{4}\,mm$, daher $D_1 = d_1 + 2e = 68 + 2 \,.\, 7\frac{3}{4} = 83\frac{1}{2}\,mm$.

53) Dieselbe Aufgabe wie die vorige, jedoch mit dem Unterschiede, dass der gusseiserne Balancier durch zwei Blechschilde ersetzt werden soll.

A. Wir nehmen wieder die Höhe h des Balanciers in der Mitte $h = 720\,mm$ an und erhalten, den vollen Rechteckquerschnitt vorausgesetzt, aus der Gleichung

$$PA = \frac{\mathfrak{S}\,b\,h^2}{6}, \quad b = \frac{6\,PA}{\mathfrak{S}\,h^2} = \frac{6 \,.\, 7234 \,.\, 180}{500 \,.\, (72)^2} = 3\,cm;$$

wir nehmen also zwei Blechschilde, jedes aus schmiedeisernen Platten von $15\,mm$ Dicke und verbinden die Schilde mit einander, theils durch die dazwischen gesteckten, gusseisernen und vernieteten Nüsse, welche die Achse und die Endzapfen aufnehmen, theils durch einige kurze Doppel-T-Stücke zwischen den Endzapfen und der Achse; die übrigen Dimensionen bleiben dieselben wie im vorigen Beispiel.

54) Für eine Wasserhaltungsmaschine von 300 Pferdekräften sind die Festigkeitsdimensionen eines schmiedeisernen, gleicharmigen Balanciers von kastenförmigem Querschnitte nach folgenden Angaben

zu berechnen: Die Armlänge A des Balanciers sei $A = 5{\cdot}1\,m$, die den Balancier auf Biegung beanspruchende Kraft in der Kolbenstange sei rund $P = 32.000\,kg$, Schwingungsachse und Zapfen sind aus Gusstahl (s. Fig. 77 u. 78).

A. Mit Rücksicht auf die in Aufgabe 52 gegebenen Erklärungen machen wir folgende Annahmen: $h = 1650\,mm$, $\frac{B}{b} = 8$, $\frac{h}{c} = 50$. Aus der Gleichung $PA = \frac{\mathfrak{S} b_0 h^2}{6}$ (ein voller Rechteckquerschnitt vorausgesetzt) erhält man: $b_0 = \frac{6PA}{\mathfrak{S}h^2} = \frac{6 \,.\, 32.000 \,.\, 510}{500 \,.\, (165)^2} = 7{\cdot}2\,cm$, die Werte $\frac{B}{b}$, $\frac{h}{c}$ und b_0 in die Gleichung

$b = \frac{b_0}{1+6\left(\frac{c}{h}\right)\left[1-2\left(\frac{c}{h}\right)\right]\left(\frac{B}{b}-1\right)}$ (s. Beispiel 52) eingesetzt, erhält man

$b = 0{\cdot}56\, b_0 = 0{\cdot}56 \,.\, 7{\cdot}2 = 4\,cm.$

Die zwei verticalen Schilde des Balanciers werden aus je zwei aufeinander genieteten Plattenreihen von $10\,mm$ Plattendicke gebildet, und zwar so, dass die Stoßfugen der einen Schichte die Stoßfugen der anderen Schichte rechtwinkelig kreuzen, was zur Herstellung der Starrheit des Balanciers nöthig ist. Die Dicke c der Horizontalgurtung wird $c = \frac{h}{50} = \frac{1650}{50} = 33$; es werden also diese Gurtungen aus je drei Platten à $11\,mm$ Dicke gebildet, welche mit

Fig. 77.

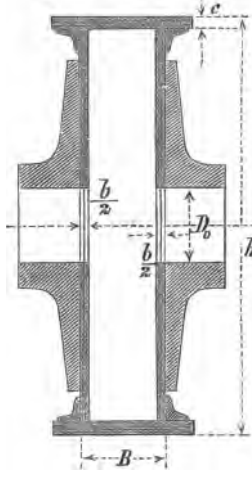
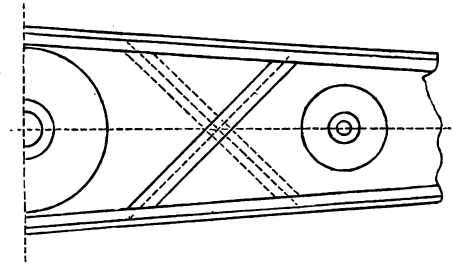


Fig. 78.



einander vernietet und mit den verticalen Schilden durch Winkeleisen verbunden werden. Die Breite B der Gurtungen, abgerechnet jene Theile, welche wegen der Vernietung mit dem Winkeleisen zugegeben werden müssen, wird $B = 8\,b = 8 \,.\, 4 = 32\,cm$; die Winkeleisen werden bei der Berechnung der Querschnittsdimensionen zu Gunsten der Festigkeit und Starrheit des Balanciers nicht berücksichtigt. Die Durchmesser d_1 der Doppelzapfen an den Enden ergeben sich mit

$$d_1 = 2{\cdot}26 \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{l_1}{d_1}} = 2{\cdot}26 \sqrt{\frac{16.000}{12} \,.\, 1{\cdot}4} = 97\,mm.$$

Die Höhe h_1 des Balanciers am Ende mit den Dimensionen des dort durchzusteckenden Doppelzapfens, sowie die Dimensionen der Schwin-

gungsachse werden ebenso wie in Beispiel 52 berechnet. Den mittleren Theil des Endzapfens mit 107 *mm* angenommen, ergibt sich $h_1 = 321\,mm$. Die Länge der Achse sei $l = 1400\,mm$, die Belastung der Achse ist $Q = 2 \,.\, 32.000 + 0{\cdot}076 \,.\, 32.000 \,.\, 5{\cdot}1 = 76{,}403\,kg$, hiermit ergibt sich $D_0 = 280\,mm$, der Durchmesser der Achszapfen wird $d = 150{\cdot}7\,mm$, die Nabenlänge des Balanciers nehmen wir $L_1 = 0{\cdot}4\,h = 0{\cdot}4 \,.\, 1650 = 660\,mm$; die Länge L des Achskopfes nehmen wir mit $L = 720\,mm$, hiermit wird der Durchmesser des dickeren Endes des Achsschenkels nach Beispiel 52

$$D = D_0 \sqrt[3]{\frac{l - L}{l}} = 280 \sqrt[3]{\frac{1400 - 720}{1400}} = 222\,mm.$$

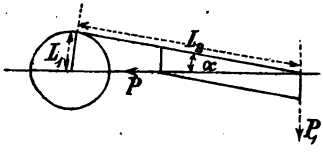
55) Bei einer horizontalen Dampfmaschine sei der in der Kolbenstange wirkende Druck $P = 7300\,kg$; es sind die Querschnittsdimensionen zweier schmiedeiserner Führungsschienen des Kreuzkopfes nach folgenden Angaben zu berechnen: Die Entfernung der Befestigungspunkte einer Führungsschiene sei $l = 124\,cm$, die Länge der Maschinenkurbel sei $L_1 = 45\,cm$, die Länge der Schubstange sei $L_2 = 225\,cm$, der Querschnitt einer Schiene sei ein Rechteck von den Dimensionen b und h.

A. Die eine Führungsschiene biegende Kraft ist der Normaldruck $P_1 = P \operatorname{tag} \alpha$, wenn α der größte Ausschlagwinkel der Schubstange ist (s. Fig. 79). Aus der Figur ist ersichtlich, dass

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{L_1}{L_2} = \frac{45}{225} = \frac{1}{5}, \text{ also } P_1 = 0{\cdot}2\,P = 0{\cdot}2 \,.\, 7300 = 1460\,kg$$

ist. Obzwar die größte die Schiene biegende Kraft beim größten Ausschlagwinkel der Schubstange nicht in der Mitte der Länge der Schiene angreift, so nehmen wir doch der Einfachheit wegen an, als ob die Schiene ein an beiden Enden unterstützter, prismatischer, in der Mitte seiner Länge belasteter Körper wäre. Daher haben wir aus der Formel $\frac{P_1 l}{4} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$ den Wert h zu berechnen. Die Breite b der Schiene ergibt sich aus der empirischen Formel $b l_1 = \frac{P_1}{0{\cdot}06}$, wobei der Druck auf die Flächeneinheit (mm^2) $0{\cdot}06\,kg$ beträgt und l_1 die Länge der Gleitfläche bedeutet. Wir nehmen $\frac{l_1}{b} = 2$ an, man erhält hiermit abgerundet $b = 110\,mm$ und $l_1 = 220\,mm$; aus obiger Festigkeitsgleichung den Wert von h berechnet, gibt: $h = 4{\cdot}69 \sim 5\,cm$; würden statt zwei Führungsschienen vier angewendet, so wäre die Höhe einer Schiene $h_1 = 47 \sqrt{\frac{1}{2}} = 33\,mm$. Stecken die Gleitbacken zu den Führungsschienen auf Zapfen vom Durchmesser d und der Länge l (Verlängerung des Kreuzkopfbolzens), so ist dieser Durchmesser d aus dem Normaldruck $P_1 = 1460\,kg$ zu berechnen, von

Fig. 79.



welcher Kraft auf jeden Zapfen die Hälfte kommt. Man findet aus $\frac{P_1 l}{4} = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{32}$: $d = \sqrt[3]{\frac{8 P_1 l}{\mathfrak{S}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 1460 \cdot 11}{400 \cdot 3 \cdot 14}} = 4{\cdot}7\,cm$ (Zapfenlänge $l = b$ = Breite der Gleitfläche). Das Mittelstück des Kreuzkopfbolzens vom Durchmesser D berechnet sich aus $\frac{P_1 e}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi D^3}{32}$, wobei e die Entfernung von der Mitte des Kreuzkopfzapfens bis zur Mitte des Gleitbackenzapfens bedeutet. Bei der Annahme von $e = 160\,mm$ und $\mathfrak{S} = 400$ pro cm^2, findet man $D = 6{\cdot}912\,cm$, oder abgerundet $D = 70\,mm$, die Länge dieses Zapfens nehme man $1\frac{1}{2} D = 105\,mm$.

56) Für eine hydraulische Presse, welche einen Druck von $P = 180.000\,kg$ ausüben soll, sind die Querschnittsdimensionen der Presskopfplatte, die den ganzen Druck P aufzunehmen hat, nach folgenden Angaben zu berechnen: Die Länge der Platte zwischen den Befestigungsschrauben sei $l = 80\,cm$, der Querschnitt der Platte ist aus Fig. 80 ersichtlich.

A. Wir denken uns die verticalen Rippen des Querschnittes zu einer einzigen Rippe in der Mitte der Breite vereinigt und er-

Fig. 80.

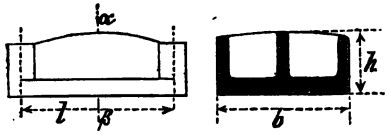
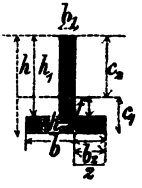


Fig. 81.



halten dadurch den einfachen T-Querschnitt, die übrigen Rippen (Nebenrippen) zur Verbindung der drei Hauptrippen lassen wir in der Rechnung unberücksichtigt. Die Presskopfplatte kann als ein prismatischer Balken angesehen werden, der an seinen beiden Enden unterstützt und auf seiner ganzen Länge gleichmäßig belastet ist; man hat daher die Formel anzuwenden: $\frac{P l}{8} = \mathfrak{S} Z$. Das Trägheitsmoment des T-Querschnittes (s. Fig. 81) ist: $J = \frac{1}{3}(b c_1^3 + b_1 c_2^3 - b_2 f^3)$. Da man hier die zwei Querschnittsmoduli $Z_1 = \frac{J}{c_1}$ und $Z_2 = \frac{J}{c_2}$ hat, so ist es am zweckmäßigsten, um das Material gut auszunützen, den Querschnitt von der Form der gleichen Festigkeit anzuwenden. Nach der in Beispiel 32 angegebenen Methode der Berechnung der Querschnitte gleicher Festigkeit nehmen wir die ganze Höhe h gleich einem Vielfachen der Dicke des verticalen Steges; da aber im vorliegenden Falle die Dicke des letzteren voraussichtlich bedeutend stärker ausfallen wird, als die Dicke der horizontalen Platte, so nehmen wir an, die Dicke der letzteren sei b_1, die Dicke des verticalen Steges $2 b_1$ und $h = 2 n b_1$; die Breite b der horizontalen Flantsche sei unbekannt. Nach der Schwerpunktslehre ist das Product aus der Querschnittsfläche F und

der Entfernung c_1 ihres Schwerpunktes von einer Geraden (hier die untere Kante der horizontalen Flantsche) gleich der Summe der Producte aus den einzelnen Flächentheilen f_1, f_2 . . . des Querschnittes in die Entfernungen d_1, d_2 . . . der Schwerpunkte jener Flächentheile von derselben Geraden. Nach diesem Satze ist: $Fc_1 = f_1 d_1 + f_2 d_2$, hierbei ist:
$F = f_1 + f_2$, $f_1 = b b_1$, $f_2 = 2 b_1^2 (2n - 1)$, $d_1 = \frac{b_1}{2}$, $d_2 = \frac{b_1 (2n+1)}{2}$, $c_1 = \frac{2 n b_1}{3}$, diese Werte in obige Schwerpunktsgleichung eingesetzt und b bestimmt, gibt: $b = 2 b_1 \left(\frac{4 n^2}{4n - 3} + 1 \right)$; diesen Wert von b in die Formel für das Trägheitsmoment eingesetzt, wobei im vorliegenden Falle $c_1 = \frac{2 n b_1}{3}$, $c_2 = \frac{4 n b_1}{3}$ und statt b_1 der Wert $2 b_1$ (Dicke des verticalen Steges) zu setzen ist, erhält man nach gehöriger Reduction: $J = \frac{8 b_1^4 n^2}{3(4n - 3)} \cdot (2n - 1)^2$, hiermit ergibt sich:

$$Z_1 = \frac{4 n b_1^3 (2n - 1)^2}{4n - 3}, \quad Z_2 = \frac{2 b_1^3 n (2n - 1)^2}{4n - 3};$$

nun ist es gleichgiltig, ob man $M = \mathfrak{S}_1 Z_1$ oder $M = \mathfrak{S}_2 Z_2$ setzt, weil $\mathfrak{S}_1 Z_1 = \mathfrak{S}_2 Z_2$ ist; setzen wir $M = \mathfrak{S}_1 Z_1 = \frac{\mathfrak{S}_1 \cdot 4 n b_1^3 (2n - 1)^2}{4n - 3}$, so ist daraus $b_1 = \sqrt[3]{\frac{(4n - 3) M}{4n (2n-1)^2 \mathfrak{S}}}$; nehmen wir hier $n = 2$, und setzen die Zahlenwerte: $M = \frac{Pl}{8} = \frac{180000 \cdot 80}{8} = 1{,}800.000, \mathfrak{S}_1 = 250$, ein, so erhält man $b_1 = 7{\cdot}937 \backsim 8\,cm$, hiermit wird die Dicke des verticalen Steges $2 b_1 = 16\,cm$, $h = 2 n b_1 = 32\,cm$, $b = 67{\cdot}2\,cm$. Die Dicke des verticalen Steges zertheilen wir in die drei einander gleichen Dicken der drei verticalen Stege der Presskopfplatte und erhalten daher die Dicke einer der drei verticalen Stege $53\frac{1}{3}\,mm$, da es bekanntlich erlaubt ist, Querschnittstheile in horizontaler Richtung zu verschieben, ohne dass dadurch der Wert des ganzen Querschnittsmoduls geändert wird.

I-Eisen-Tabelle

der Burbacher Hütte bei Saarbrücken.

Es bezeichnet h die Trägerhöhe, b die Flantschenbreite, d die Stegdicke, t die mittlere Flantschenstärke in Centimetern, G das Gewicht pro laufenden Meter in Kilogrammen, $Z = \frac{J}{c}$ den Querschnittsmodul, Centimeter als Einheit angenommen.

Nummer	h	b	t	d	G	Z
1	10	5	0·7	0·5	9	35·6
2	9·7	5·3	1	0·7	12·5	47
3	9·5	5·9	1·3	1	17·5	60·5
4	12·5	7·5	0·8	0·6	14·5	76·2

Nummer	h	b	t	d	G	Z
5	12·15	8·2	1·2	0·85	21·75	108·3
6	11·95	9	1·4	1·1	27·5	129·8
7	15	8	0·95	0·7	18·5	117·7
8	14·6	8·4	1·1	0·9	23	135·2
9	14·4	9	1·5	1·1	30·75	175·6
10	17·4	9·1	1·1	0·9	26·25	183·4
11	17·2	9·6	1·3	1·05	31·25	210·2
12	17	10·3	1·6	1·2	38·5	261·7
13	19·8	9·9	1·25	0·95	32	256·8
14	19·6	10·4	1·45	1·1	37·75	297·6
15	19·4	11·2	1·75	1·4	47·5	364·1
16	23·35	9·5	1·3	1·1	37·25	327·6
17	23·2	10·2	1·475	1·25	43	381·1
18	23	10·8	1·725	1·5	51·5	448·6
19	23·5	9·3	0·925	1	30	258·6
20	23·5	9·15	1·4	1·3	40·5	348·4
21	23·5	10·5	2	2	62·75	519·4
22	24·8	11·4	1·475	1·2	46·5	453·5
23	24·6	11·9	1·675	1·3	52·5	511·1
24	24·4	12·5	1·9	1·5	61	583·5
25	24·85	13·9	1·575	1·1	52·5	553·4
26	24·7	14·6	1·85	1·2	61·25	647·2
27	24·5	15	2·15	1·3	70·25	732·5
28	26	9·775	1·5	1·25	45	436·4
29	25·8	10·5	1·69	1·45	52·75	505·6
30	25·6	11·4	1·95	1·7	63·5	599·9
31	30	12·5	1·55	1·3	57·75	663·8
32	29·6	13	1·9	1·5	68·75	786·3
33	29·3	13·9	2·3	1·7	82·5	943·1
34	32	13·6	1·9	1·6	75·5	919·5
35	31·75	13·5	2·075	1·7	80·25	965·8
36	31·5	14·2	2·35	2	93·75	1105·8
37	40	14	1·7	1·6	82·75	1200·2
38	39·8	13·9	1·85	1·7	87·75	1266·2
39	39·6	15	2·125	1·8	99	1366·3

Aufgaben aus der Lehre von der Torsionsfestigkeit.

1) Ein cylindrischer, schmiedeiserner Stab von der Länge $l = 1500\,mm$ ist an dem einen Ende in horizontaler Lage fest eingeklemmt (eingemauert) und am anderen Ende durch eine Kraft $P = 5000\,kg$, die an dem Umfange einer auf dem Stabe festsitzenden Scheibe vom Halbmesser $R = 500\,mm$ angreift, auf Torsion beansprucht; es ist der Durchmesser d dieses Stabes und der Verdrehungswinkel α desselben zu berechnen.

A. Das Torsionsmoment ist hier für alle Stabquerschnitte gleich groß, daher ist jeder Querschnitt ein gefährlicher, man hat also hier nach der Lehre von der Torsionsfestigkeit das Torsionsmoment gleich zu setzen dem Widerstandsmoment, daher

$$PR = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{16}, \text{ woraus } d = \sqrt[3]{\frac{16\,PR}{\mathfrak{S}\pi}} \text{ folgt.}$$

Mit der Spannung $\mathfrak{S} = 4$ erhält man, wenn man die übrigen Zahlenwerte einsetzt, $d = 68\,mm$. Der Verdrehungswinkel α ist:

$$\widehat{\alpha} = \frac{PRl}{J_p\,G} = \frac{\mathfrak{S}l}{Ga}, \text{ oder } \alpha^0 = \widehat{\alpha} \,.\, \frac{180}{\pi},$$

wobei J_p das polare Trägheitsmoment, hier $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$, G den Torsions-Elasticitätsmodul für Schmiedeisen, $G = 8000$ und a den Abstand der am weitesten vom Schwerpunkte des Querschnittes entfernten Materialfaser bedeutet; hier ist $a = \frac{d}{2}$, man erhält $\alpha^0 = 1{\cdot}2795$.

Für die Annahme, dass die Verdrehung $\frac{1^0}{4}$ pro laufenden Meter Länge betragen solle, hätte man im vorliegenden Falle für die Stablänge $l = 1{\cdot}5\,m$, $\alpha = 1{\cdot}5 \,.\, 0{\cdot}25 = 0{\cdot}375^0$. Unter der Bedingung, dass die Verdrehung $\frac{1^0}{4}$ pro Meter betragen solle, würde man den Durchmesser d aus der Formel $\alpha^0 = \frac{PRl \,.\, 32 \,.\, 180}{\pi^2 G d^4}$ mit

$$d = \sqrt[4]{\frac{180 \,.\, 32 \,.\, PRl}{\pi^2 G \alpha^0}}, \text{ oder } d = \sqrt[4]{\frac{180 \,.\, 32 \,.\, 500 \,.\, 500 \,.\, 1500}{(3{\cdot}14)^2 \,.\, 8000 \,.\, 0{\cdot}375}} = 92{\cdot}4\,mm$$

finden. Will man wissen, wie groß in diesem Stabe von $92{\cdot}4\,mm$ Durchmesser die Spannung ist, wenn er durch das Torsionsmoment PR beansprucht wird, so findet man diese aus der Formel $PR = \mathfrak{S}Z$ mit $\mathfrak{S} = \frac{PR}{Z} = \frac{PR}{\frac{\pi}{16} d^3}$, oder $\mathfrak{S} = \frac{500 \,.\, 500}{\frac{3{\cdot}14}{16} \,.\, (92{\cdot}4)^3} = 1{\cdot}61\,kg$. Setzt man diesen Wert von $\mathfrak{S}$ in die Formel $\alpha^0 = \frac{180 \,.\, \mathfrak{S}l}{\pi G a} = \frac{180 \,.\, 2\mathfrak{S}l}{\pi G d}$ ein und bestimmt d, so erhält man wieder nach Einsetzung der Zahlenwerte und Ausrechnung: $d = 92{\cdot}4\,mm$.

2) Eine schmiedeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitte und der Länge $l = 1900\,mm$ wird durch eine Kraft $P = 200\,kg$, welche an einem Hebelarme von der Länge $R = 500\,mm$ angreift, auf Torsion beansprucht. Welchen Durchmesser d muss diese Welle bei bloßer Berücksichtigung der Festigkeit erhalten, wenn die zulässige Maximalfaserspannung $\mathfrak{S} = 5\,kg$ beträgt? Wie groß ist ferner der Verdrehungswinkel?

A. Aus der Gleichung $PR = \mathfrak{S}Z$ folgt, wenn man für Z den Wert $Z = \frac{\pi d^3}{16}$, sowie die Zahlenwerte einsetzt und d bestimmt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, 200 \,.\, 500}{5 \,.\, 3{\cdot}14}} = 46{\cdot}7 \backsim 47\,mm. \text{ Der Verdrehungswinkel ist:}$$

$$\alpha = \frac{5 \,.\, 1900 \,.\, 180}{8000 \,.\, 23{\cdot}5 \,.\, 3{\cdot}14} = 2{\cdot}899 \backsim 2{\cdot}9^0.$$

3) Ein Balken aus Eichenholz von quadratischem Querschnitte ist mit seinen beiden Enden fest eingeklemmt und trägt in der Mitte seiner Länge an einem Arme, der senkrecht zur Balkenlänge steht und eine Länge $R = 729\,mm$ hat, eine Last $P = 1000\,kg$; wie groß muss der Querschnitt des Balkens, respective eine Seite des

Quadrates gemacht werden, wenn eine merkliche Verdrehung des Balkens nicht stattfinden soll? Die Länge des letzteren zwischen den Befestigungspunkten ist $l = 4\,m$.

A. Hier ist jede Balkenhälfte durch das Moment $\frac{PR}{2}$ auf Torsion beansprucht, daher findet man aus der Gleichung $\frac{PR}{2} = \mathfrak{S} Z = \frac{\mathfrak{S} b^3}{3\sqrt{2}}$, wenn man $\mathfrak{S} = 0{\cdot}08$, sowie die übrigen Zahlenwerte einsetzt und b bestimmt: $b = \sqrt[3]{\frac{3 \,.\, 1000 \,.\, 729}{0{\cdot}08 \,.\, 1{\cdot}4142}} = 264{\cdot}5\,mm \backsim 265$, der Verdrehungswinkel wird:

$$\alpha^0 = \frac{\mathfrak{S} l}{Gc} \,.\, \frac{180}{\pi} = \frac{0{\cdot}08 \,.\, 4000 \,.\, 180}{80 \,.\, \frac{265}{\sqrt{2}} \,.\, 3{\cdot}14} = 1{\cdot}22^0.$$

4) Eine schmiedeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitte und einer Länge von $l = 4\,m$ soll 1600 Pferdekräfte bei $u = 40$ Umdrehungen pro Minute übertragen. Wie groß ist der Durchmesser d dieser Welle zu machen, *a)* wenn sie mit Rücksicht auf ihre Verdrehung, *b)* mit Rücksicht auf ihre Torsionsfestigkeit allein berechnet wird, *c)* wie groß würde der Durchmesser der Welle nach diesen beiden Berechnungsarten ausfallen, wenn die Welle aus Gusstahl gemacht würde, *d)* wie groß wird in den Fällen *a*, *b*, *c*, der Verdrehungswinkel?

A. Ad *a)* Aus der Gleichung $\alpha^0 = \frac{PRl}{J_p G} \,.\, \frac{180}{\pi}$ folgt, wenn man $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ einsetzt und d bestimmt: $d = \sqrt[4]{\frac{5760\,PRl}{\pi^2 G \alpha^0}}$, hier sind d, R, l in Millimetern, G in Kilogrammen zu nehmen; die Länge der Welle anstatt in Millimetern in Metern eingesetzt, also $l^{mm} = 1000\,L^m$ und $\alpha^0 = \frac{1}{4} \,.\, L$ $\left(\text{Verdrehung pro laufenden Meter} = \frac{1^0}{4}\right)$ gesetzt, gibt: $d = 27{\cdot}6465 \sqrt[4]{\frac{4\,PR}{G}}$, oder weil $G = 8000$ und $PR = \frac{716200\,N}{u}$ ist, hat man auch: $d = 4{\cdot}13 \sqrt[4]{PR} = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{u}} = 120 \sqrt[4]{\frac{1600}{40}} = 300\,mm.$

Ad *b)* Aus der Gleichung $PR = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16}$ folgt: $d = \sqrt[3]{\frac{16\,PR}{\mathfrak{S}\pi}} = 1{\cdot}7202 \sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}}$, oder für PR obigen Wert gesetzt und d bestimmt: $d = 154 \sqrt[3]{\frac{N}{u\mathfrak{S}}}$; mit $\mathfrak{S} = 3{\cdot}5$ gibt dies, wenn man die Zahlenwerte einsetzt:

$$d = 154 \sqrt[3]{\frac{1600}{40 \,.\, 3{\cdot}5}} = 346{\cdot}84 \backsim 347\,mm.$$

Ad *c)* Für Gusstahl $\mathfrak{S} = 6{\cdot}5$ gesetzt, erhält man

$$d = 154 \sqrt[3]{\frac{1600}{40 \,.\, 6{\cdot}5}} = 281{\cdot}82 \backsim 282\,mm.$$

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Die Gusstahlwelle mit Rücksicht auf ihre Verdrehung berechnet $\left(\frac{1^0}{4}\text{ auf }1\,m\text{ Länge}\right)$, gibt, weil bei Gusstahl $G = 8000$ ist, ebenfalls wie bei Schmiedeisen, $d = 300\,mm$.

Ad *d)* Der Verdrehungswinkel ist im ersten Falle $\alpha_1 = \frac{l}{4} = \frac{4}{4} = 1^0$, im Falle *b)* ist $\alpha_2 = \frac{\mathfrak{S} l}{G\frac{d}{2}} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{3{\cdot}5\ .\ 4000}{8000\ .\ \frac{347}{2}} \cdot \frac{180}{3{\cdot}14} = 0{\cdot}578^0$; für den Fall *c)* ist $\alpha_3 = \frac{6{\cdot}5\ .4000}{8000\ .\ \frac{282}{2}} \cdot \frac{180}{3{\cdot}14} = 1{\cdot}321^0$. Berechnet man noch die für den Fall *a)* in der Welle eintretende Faserspannung aus der Formel $\alpha^0 = \frac{\mathfrak{S} l}{G\frac{d}{2}} \cdot \frac{180}{\pi}$, so ist $\mathfrak{S} = \frac{G d a \pi}{2\,.\,180\,l} = \frac{8000\,.\,300\,.\,1\,.\,3{\cdot}14}{2\,.\,180\,.\ 4000} =$ $= 5{\cdot}23\,kg$.

In der folgenden Tabelle sind die erhaltenen Resultate dieser Aufgabe übersichtlich zusammengestellt.

Schmiedeiserne Welle		Gusstahl-Welle	
Auf Festigkeit berechnet I	Auf Verdrehung berechnet II	Auf Festigkeit berechnet III	Auf Verdrehung berechnet IV
Durchmesser $d = 347\,mm$	$d = 300\,mm$	$d = 282\,mm$	$d = 300\,mm$
Spannung $\mathfrak{S} = 3{\cdot}5\,kg$	$\mathfrak{S} = 5{\cdot}23\,kg$	$\mathfrak{S} = 6{\cdot}5$	$\mathfrak{S} = 5{\cdot}23$
Sicherheitsgrad $s = 10$	$s = \frac{35}{5{\cdot}23} = 6{\cdot}69$	$s = 10$	$s = \frac{65}{5{\cdot}23} = 12{\cdot}4$
Verdrehungswinkel $\alpha = 0{\cdot}578^0$	$\alpha = 1^0$	$\alpha = 1{\cdot}321^0$	$\alpha = 1^0$

Aus dieser Tabelle geht hervor: Da Gusstahl viel theurer als Schmiedeisen ist, so wird man, wenn man sich mit der Sicherheit $s = 6{\cdot}69$ begnügt, für die praktische Ausführung den Fall II wählen. Will man aber ein verlässliches Material und größere Sicherheit, so muss man von dem höheren Preise des Gusstahls absehen und den Fall III wählen; dass hierbei die Verwindung der Welle etwas größer als in den übrigen Fällen ist, fällt nicht ins Gewicht.

5) Eine schmiedeiserne Transmissionswelle soll $N = 30$ Pferdekräfte bei $u = 90$ Umdrehungen pro Minute übertragen; wie groß ist der Durchmesser der Welle zu machen, wenn die zulässige Torsionsspannung $\mathfrak{S} = 2{\cdot}3\,kg$ pro Quadratmillimeter betragen soll, und wie groß wird der Verdrehungswinkel, wenn die Länge der Welle $= 4\,m$ ist?

A. Aus der Formel $M = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{16} = \frac{716200\,N}{u}$, findet man:

$$d = 154\sqrt[3]{\frac{N}{u\,\mathfrak{S}}} = 154\sqrt[3]{\frac{30}{90\,.\,2{\cdot}3}} = 80{\cdot}81 \sim 81\,mm,$$

der Verdrehungswinkel α wird:

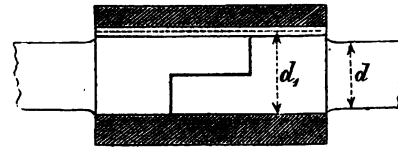
$$\alpha = \frac{\mathfrak{S} l}{G\frac{d}{2}} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{2{\cdot}3\ .4000\,.\,180}{8000\,.\,40{\cdot}5\ .\,3{\cdot}14} = 1{\cdot}62^0.$$

6) Zwei schmiedeiserne Transmissionswellen, beide 90 *mm* im Durchmesser haltend, sollen durch einen glatten cylindrischen Kupplungsmuff unter Anwendung eines Keiles fest miteinander verbunden werden; man fragt nach der Wandstärke w des Muffes.

A. Der Kupplungsmuff wird durch das Torsionsmoment der Welle auf Torsion beansprucht. Für die auf ihre Festigkeit berechnete, schmiedeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitte ist $d = \sqrt[3]{PR}$ gleich dem inneren Durchmesser des Muffes, daher ist $PR = d^3 = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16}\left(\frac{d_1^4 - d^4}{d}\right)$, woraus mit $\mathfrak{S} = 1$ (wegen der besonderen Anstrengung des Muffes durch das Eintreiben des Keiles) $d_1 = 1{\cdot}8\,d$ folgt, hiermit ergibt sich die Wandstärke $w = 36\,mm$.

7) Zwei schmiedeiserne Transmissionswellen von kreisförmigen Querschnitten sind an ihren Enden durch eine Überplattung und einen cylindrischen Kupplungsmuff unter Anwendung eines Keiles fest miteinander verbunden (s. Fig. 82). Wenn der Durchmesser der Wellen außerhalb der Kupplung $d = 90\,mm$ ist, so fragt man, wie groß ist der Durchmesser d_1 jeder der beiden halbkreisförmig geformten Wellenenden zu machen?

Fig. 82.



A. Das Torsionsmoment, welches die Welle beansprucht, haben auch die Wellenenden, deren Querschnitte halbkreisförmig sind, aufzunehmen; daher muss das polare Trägheitsmoment des halbkreisförmigen Querschnittes mal der zulässigen Torsionsspannung gleich gemacht werden dem Torsionsmomente M, also $M = \mathfrak{S} Z_1 = \mathfrak{S} Z$, wenn Z_1 dem halbkreisförmigen und Z dem kreisförmigen Querschnitte entspricht. Das Torsionsmoment des Halbkreises, bezogen auf dessen horizontaler Schwerachse, ist: $J_1 = \frac{r_1^4(9\pi^2 - 64)}{72\pi}$, das Trägheitsmoment des Halbkreises, bezogen auf dessen verticale Schwerachse, ist: $J_2 = \frac{\pi r_1^4}{8}$, daher das polare Trägheitsmoment $J_p = J_1 + J_2 = 0{\cdot}5025\,r_1^4$; die Entfernung c des Schwerpunktes des Halbkreises von der äußersten Faser ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises und die andere Kathete der Halbmesser ist, daher $c = \sqrt{\left(\frac{4r_1}{3\pi}\right)^2 + r^2} = \frac{r_1}{3\pi}\sqrt{16 + 9\pi^2}$, somit ist der polare Querschnittsmodul

$$Z_p = \frac{J_p}{c} = \frac{0{\cdot}5025\,r_1^4}{\frac{r_1}{3\pi}\sqrt{16 + 9\pi^2}} = 0{\cdot}147\,\pi r_1^3.$$

Durch Gleichsetzung der beiden polaren Trägheitsmomente des vollen Kreisquerschnittes vom Halbmesser r und des Halbkreises vom Halb-

messer r_1 erhält man: $\frac{\pi r^2}{2} = 0{\cdot}147\,\pi r_1^2$, woraus $r_1 = 1{\cdot}503\,r \sim 1{\cdot}5\,r$ oder $d_1 = 1{\cdot}5\,d$ folgt. Der Durchmesser des halbkreisförmigen Wellenendes wird also $d_1 = 1{\cdot}5 \,.\, 90 = 135\,mm$.

8) Mittelst einer Bauwinde mit doppelter Räderübersetzung ist eine Last $Q = 2500\,kg$ in die Höhe zu heben. Man fragt nach den Durchmessern der schmiedeisernen Wellen.

A. Wir machen folgende Annahmen: An den Enden der Kurbelwelle (s. Fig. 83) wirken zwei Mann mit à $16\,kg$ Kraft an einer Kurbel von $R = 400\,mm$; der Halbmesser der Seiltrommel sei $r = 120\,mm$, damit erhält man die ganze Räderübersetzung:

$$i = \frac{Qr}{PR} = \frac{2500 \,.\, 120}{32 \,.\, 400} = 23\,\frac{7}{16} \sim 24.$$

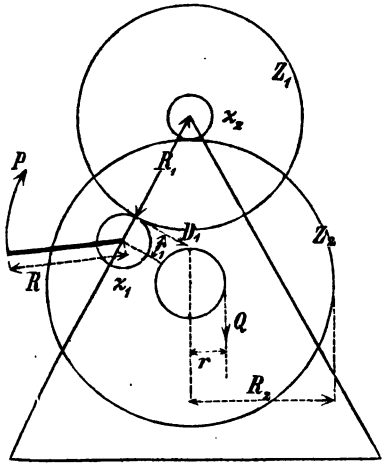
Diese Übersetzungszahl i zerlegen wir in die zwei Factoren

$i_1 = \frac{R_1}{r_1} = \frac{Z_1}{z_1} = 4$ und $i_2 = \frac{R_2}{r_2} = \frac{Z_2}{z_2} = 6$, wobei R_1, r_1, Z_1, z_1 die Theilkreishalbmesser und Zahnzahlen des ersten Räderpaares (zwei ineinandergreifende Zahnräder) R_2, r_2, Z_2, z_2, die Halbmesser und Zahnzahlen des zweiten Räderpaares bedeuten. Für die erste Welle (Kurbelwelle) ist das Torsionsmoment $M_1 = PR = 32 \,.\, 400 = 12.800$; für die zweite Welle ist $M_2 = D_1 R_1$ (D_1 = Zahndruck im ersten Räderpaar), woraus $\frac{M_2}{M_1} = \frac{R_2}{r_1} = i_1 = 4$ folgt; daher ist $M_2 = 4\,M_1 = 4 \,.\, 12800 = 51200$; für die dritte Welle ist $M_3 = Qr = 2500 \,.\, 120 = 300.000$. Da die Wellen kurz sind, so berechnen wir sie nur auf ihre Torsionsfestigkeit und haben nach der Formel

$$d = \sqrt[3]{PR} = \sqrt[3]{M},$$

wenn wir für M nach einander die Werte setzen M_1, M_2, M_3, für die drei Wellen: $d_1 = 24\,mm$, $d_2 = 38\,mm$, $d_3 = 67\,mm$; die Kurbelwelle wird man jedoch aus praktischen Rücksichten nicht unter $30\,mm$ Dicke nehmen.

Fig. 83.



9) Eine cylindrische Schraubenfeder vom mittleren Halbmesser $R = 36\,mm$ erfährt in der Richtung der Cylinderachse eine Zugbeanspruchung von $P = 24\,kg$; der Federdraht hat einen kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d, ist aus gehärtetem und angelassenem Gusstahl, die Anzahl der Windungen ist $n = 10$; man fragt: 1. Wie groß ist der Durchmesser d des Drahtes zu machen? 2. Wie groß ist die Ausdehnung oder Verlängerung f der Feder? 3. Welche Länge l muss der gestreckt gedachte Draht der Feder erhalten?

A. Die hauptsächlichste Wirkung, die die Kraft P auf die Feder hervorbringt, ist eine Verdrehung der Federelemente mittelst des Torsionsmomentes PR und kann daher der Durchmesser d des Federdrahtes wie der Durchmesser einer Torsionswelle nach der Formel $PR = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{16}$, berechnet werden. Man erhält daher aus dieser Formel:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16PR}{\mathfrak{S}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 24 \cdot 36}{36 \cdot 3{\cdot}14}} = 4{\cdot}95 \backsim 5\ mm.$$

Die Ausdehnung oder Verlängerung f, welche die Feder durch den achsialen Zug erleidet, findet man im Wege des höheren Calculs mit $f = \frac{2n\alpha\pi PR^3}{J_p G} = \frac{64n\alpha PR^3}{Gd^4}$, worin α einen Coëfficienten, für den Kreisquerschnitt $= 1$ und $G = 10.000$ den Torsions-Elasticitätsmodul bedeuten. Die Zahlenwerte eingesetzt, erhält man:

$$f = \frac{64 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 24 \cdot (36)^3}{10000 \cdot 5^4} = 114{\cdot}6 \backsim 115\ mm.$$

Die Länge l der gestreckt gedachten Feder ist $l = 2\pi Rn$, oder genauer: $l = n\sqrt{d^2 + (2\pi R)^2} = 10\sqrt{5^2 + (2 \cdot 3{\cdot}14 \cdot 36)^2} = 2261{\cdot}35\ mm.$

10) Für eine Federwage von $50\,kg$ Tragkraft soll eine cylindrische Schraubenfeder aus rundem Gusstahldraht angefertigt werden. Man verlangt, dass auf der Gewichtsscala die Theilstriche, die den einzelnen Kilogrammen entsprechen sollen, $2\,mm$ weit von einander entfernt sein sollen, dass also die durch die Kraft $P = 50\,kg$ hervorgebrachte ganze Dehnung der Feder $f = 100\,mm$ betrage; man fragt nach dem Durchmesser d des Drahtes, der Anzahl n der Windungen und dem mittleren Halbmesser R der Spirale.

A. Zur Auffindung der drei Unbekannten d, n und R haben wir nur die zwei Gleichungen:

$$PR = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{16} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$f = \frac{64nPR^3\alpha}{Gd^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2);$$

wir nehmen daher eine der Unbekannten an, z. B. $d = 5\,mm$ und erhalten aus den Gleichungen (1) und (2), wenn wir die Zahlenwerte einsetzen: $R = \frac{36 \cdot 3{\cdot}14 \cdot 5^3}{16 \cdot 50} = 17{\cdot}66\,mm$, wir runden diesen Wert auf $20\,mm$ ab und erhalten damit $n = \frac{100 \cdot 10000 \cdot 5^4}{64 \cdot 50 \cdot (20)^3 \cdot 1} = 24{\cdot}4$ Windungen.

11) Eine Kegelschraubenfeder aus Gusstahl für einen Puffer eines Eisenbahnwagens soll im zusammengedrückten Zustande einen Widerstand von $P = 2000\,kg$ entgegensetzen und bei diesem Drucke sich um eine Länge $f = 40\,mm$ unter ihre Normallänge (Länge im nicht gedrückten Zustande) verkürzen. Der Querschnitt des Drahtes sei eine Kreisfläche. Man fragt nach dem mittleren Halbmesser R der größeren Endfläche des Kegelstutzes, der Anzahl n der Windungen und dem Durchmesser d des Rundstahles.

A. Im Wege höheren Calculs erhält man $f = \frac{\pi n}{2} \cdot \frac{aP}{J_p G}\left(\frac{R^4 - r^4}{R - r}\right)$, in welcher Gleichung R und r die mittleren Halbmesser der beiden

Endflächen des Kegelstutzes bedeuten. Für den Kreisquerschnitt des Federdrahtes ist $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$, hiermit erhält man $f = \frac{16 n \alpha P (R^4 - r^4)}{G d^4 (R - r)}$. Der Durchmesser d wird ebenso wie bei der cylindrischen Schraubenfeder aus der Formel $PR = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16}$ gefunden. Wir machen die Annahme $R = 80\,mm$ und $r = 40\,mm$; man findet:

$$d = \sqrt{\frac{16 \,.\, 2000 \,.\, 80}{36 \,.\, 3{\cdot}14}} = 28{\cdot}2 \backsim 28\,mm.$$

Die obige Gleichung für f nach der Unbekannten n aufgelöst und die Zahlenwerte eingesetzt, gibt: $n = \frac{10000 \,.\, (28)^4 \,.\, 40\,(80 - 40)}{16 \,.\, 1 \,.\, 2000\,[(80)^4 - (40)^4]} = 8.$

Aufgaben aus der Lehre von der Zerknickungs- und zusammengesetzten Festigkeit.

1) Eine Säule aus Tannenholz von kreisförmigem Querschnitte und $3\,m$ Höhe ist mit ihrem unteren Ende fest eingeklemmt und soll auf ihrem oberen, freien Ende eine Last $P = 4000\,kg$ mit zehnfacher Sicherheit tragen; welchen Durchmesser d muss die Säule erhalten?

A. Für diesen Fall hat man nach der Lehre von der Zerknickungsfestigkeit: $P = \frac{\pi^2 JE}{4 l^2}$, worin n den Grad der Sicherheit bedeutet; hier ist $J = \frac{\pi d^4}{64}$, diesen Wert, sowie die gegebenen Zahlenwerte, den Elasticitätsmodul $E = 1100$, $l = 3000$, $n = 10$ eingesetzt, gibt, die Gleichung nach der Unbekannten d aufgelöst, $d = 227{\cdot}6\,mm$. Die Sicherheit gegen das Zerdrücken ist, weil die Druckspannung $\mathfrak{S} = \frac{P}{f} = \frac{4 \,.\, 4000}{3{\cdot}14 \,.\, (228)^2} = 0{\cdot}098$ ist, eine $\frac{5}{0{\cdot}098} = 51$fache, wobei der Bruchmodul des Tannenholzes gegen Zerdrücken $= 5$ angenommen wurde.

2) Dieselbe Aufgabe, wie die vorige, jedoch mit dem Unterschiede, dass beide Enden der Säule frei auf ebenen Flächen aufliegen und in der ursprünglichen Achse des Stabes geführt werden.

A. Für diesen Fall gilt die Festigkeitsformel $P = \frac{\pi^2 JE}{l^2 n}$; den Wert $J = \frac{\pi d^4}{64}$ und die Zahlenwerte eingesetzt, gibt, die Unbekannte d bestimmt, $d = 161\,mm$.

3) Dieselbe Aufgabe wie in Nummer 1, jedoch mit dem Unterschiede, dass die beiden Enden der Säule eingeklemmt sind; für diesen Fall ist $P = \frac{4 \pi^2 JE}{l^2 n}$; die Werte $J = \frac{\pi d^4}{64}$, $n = 10$, $l = 3000$, $P = 4000$, $E = 1100$ eingesetzt und d bestimmt, gibt $d = 114\,mm$. Die im Stabe durch die Belastung entstehende Druckspannung ist $\mathfrak{S} = \frac{P}{f} = \frac{4000}{3{\cdot}14 \,.\, \left(\frac{114}{4}\right)^2} = 0{\cdot}39$, was eine 12·8fache Sicherheit ergibt.

4) Eine schmiedeiserne Stange von rechteckigem Querschnitte ist in verticaler Lage mit ihrem unteren Ende fest eingespannt und mit ihrem oberen Ende frei, jedoch in der Richtung der Achse des Stabes geradlinig geführt; die Stange ist $4\,m$ lang und wird in der Richtung ihrer Achse durch eine Last $P = 1200\,kg$ auf ihre Zerknickungsfestigkeit beansprucht. Es sind die Querschnittsdimensionen der Stange zu berechnen.

A. Für diesen Fall ist $P = \frac{2\pi^2 JE}{l^2 n}$. Die Querschnittsdimensionen des Stabes seien h und b, wobei $h > b$ ist, und da hier das kleinere der beiden äquatorialen Trägheitsmomente zu nehmen ist, so hat man $J = \frac{b^3 h}{12}$ zu gebrauchen; man erhält mit $h = 5b$, $P = \frac{5 b^4 \pi^2 E}{6 l^2 n}$,

woraus $b = \sqrt[4]{\frac{6 P l^2 n}{5 \pi^2 E}} = \sqrt[4]{\frac{6 \,.\, 1200 \,.\, (4000)^2 \,.\, 5}{5 \,.\, (3{\cdot}14)^2 \,.\, 20000}} = 27{\cdot}63\,mm$,

somit $h = 5b = 5 \,.\, 27{\cdot}63 = 138{\cdot}12\,mm$ folgt.

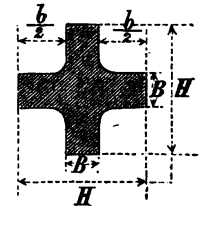
5) Eine gusseiserne, hohle Säule, die mit ihren beiden Enden fest eingeklemmt ist, hat in der Richtung ihrer Achse eine Last $P = 5000\,kg$ zu tragen; die Höhe der Säule ist $l = 8\,m$, es sind die Querschnittsdimensionen derselben zu berechnen.

A. Für diesen Fall ist die Formel $P = \frac{4\pi^2 JE}{l^2 n}$ anzuwenden. Die Werte $J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ (D = äußerer, d = innerer Durchmesser der Säule), $d = \alpha D$ eingesetzt und D bestimmt, gibt:

$D = \sqrt[4]{\frac{16 n l^2 P}{\pi^3 E (1 - \alpha^4)}}$, mit $\alpha = 0{\cdot}6$, $n = 6$, $E = 10.000$, erhält man $D = 102\,mm$, $d = 0{\cdot}6 \,.\, 102 = 61{\cdot}2\,mm$.

6) Ein einer Eisenconstruction angehörender, gusseiserner Stab von kreuzförmigem Querschnitte und der Länge $= 1{\cdot}5\,m$ wird durch eine Kraft $P = 3000\,kg$ auf seine Zerknickungsfähigkeit beansprucht; der Stab ist an seinen beiden Enden so befestigt, dass er als lose Strebe angesehen werden kann, deren Enden in der Richtung der ursprünglichen Stabachse gerade geführt sind, es sind die Querschnittsdimensionen dieses Stabes zu berechnen (s. Fig. 84).

Fig. 84.



A. In die für diesen Fall geltende Festigkeitsformel $P = \frac{\pi^2 JE}{l^2 n}$ den Wert $J = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$, ferner $B = \frac{H}{4}$, $b = H - B$ eingesetzt und H berechnet, gibt $J = \frac{67 H^4}{3072}$ und hiermit $H = \sqrt[4]{\frac{3072 l^2 n P}{67 \pi^2 E}}$, die Zahlenwerte eingesetzt, erhält man: $H = 66\,mm$, somit $B = 16\frac{1}{2}\,mm$.

7) Eine schmiedeiserne Schubstange von kreisförmigem Querschnitte wird in der Richtung ihrer Achse durch eine Kraft $P = 3000\,kg$

auf Zerknickungsfestigkeit beansprucht; die Länge des Stabes ist $l = 2\,m$. Es ist der Durchmesser d der Schubstange in der Mitte der Länge zu berechnen.

A. In die hier anzuwendende Formel $P = \frac{\pi^2 JE}{l^2 n}$ für J den Wert $J = \frac{\pi d^4}{64}$ eingesetzt und d bestimmt, gibt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{64\,n\,l^2\,P}{\pi^2 E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \,.\, 20 \,.\, (2000)^2 \,.\, 3000}{(3{\cdot}14)^2 \,.\, 20000}} = 70{\cdot}71,$$

oder abgerundet $71\,mm$; hier wurde der Sicherheitsgrad $n = 20$, wie bei Schubstangen üblich, angenommen.

8) Dieselbe Aufgabe wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass der Querschnitt der Stange ein Rechteck ist von den Dimensionen b und h, wobei $h > b$ ist.

A. In die hier anzuwendende Formel $P = \frac{\pi^2 JE}{l^2 n}$ für J den Wert $J = \frac{b^3 h}{12}$, ferner $\frac{b}{h} = \alpha = \frac{1}{3}$, $n = 20$, die übrigen Zahlenwerte eingesetzt und h bestimmt, gibt:

$$h = \sqrt[4]{\frac{12\,P\,n\,l^2}{\pi^2 \alpha^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{12 \,.\, 3000 \,.\, 20 \,.\, (2000)^2}{(3{\cdot}14)^2 \,.\, \left(\frac{1}{3}\right)^3 \,.\, 20000}} = 141\,mm;$$

hiermit erhält man: $b = \frac{141}{3} = 47\,mm$, für $\frac{b}{h} = \frac{1}{2}$, würde man $h = 104$, $b = 52$ erhalten.

9) Wie groß ist der Durchmesser d einer schmiedeisernen Kolbenstange zu machen, die zu einem Dampfcylinder von $450\,mm$ lichtem Durchmesser gehört, wenn der nützliche Dampfdruck $a = 4$ Atmosphären und die größte Länge der Kolbenstange außerhalb der Stopfbüchse $L = 900\,mm$ beträgt.

A. Die Kolbenstange auf ihre Zugfestigkeit berechnet, gibt (s. Aufgabe 31 der Beispiele über Zugfestigkeit):

$$d = 0{\cdot}0408\,D\sqrt{a} = 0{\cdot}0408 \,.\, 450\sqrt{4} = 36{\cdot}72 \backsim 37\,mm.$$

Die Kolbenstange auf Strebfestigkeit berechnet (an dem einen Ende als eingeklemmt betrachtet, am anderen Ende in der ursprünglichen Stabachse gerade geführt), erhält man aus der diesem Falle entsprechenden Gleichung $P = \frac{2\pi^2 JE}{L^2 n}$, mit $J = \frac{\pi d^4}{64}$ und $P = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{a}{100}$,

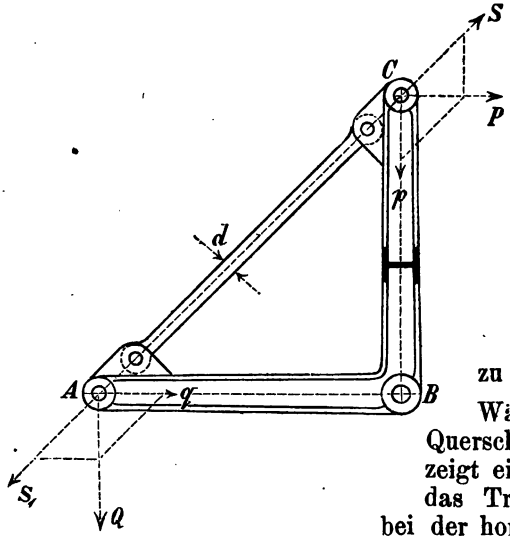
$$d = 0{\cdot}3\,D\sqrt{\frac{L}{D}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a\,n}{E}}, \text{ oder } d = 0{\cdot}3 \,.\, 450\sqrt{\frac{900}{450}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4 \,.\, 25}{20000}} =$$

$= 50{\cdot}76 \backsim 51\,mm$; dieses Resultat ist für die Ausführung beizubehalten.

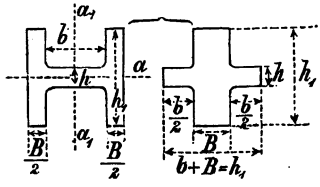
10) Beim Winkelhebel ABC (Kunstwinkel zum Betriebe einer Pumpe, s. Fig. 85) betrage jede der an den Punkten A und C senkrecht zu den gleich langen Armen des Kunstwinkels angreifenden, einander gleichen Kräfte, $P = Q = 4000\,kg$. Die Länge eines Armes ist $l = 800\,mm$. Es sind die Querschnittsdimensionen der Arme und der Durchmesser d der schmiedeisernen Zugstange von kreisförmigem Querschnitte zu berechnen.

A. Denkt man sich jede der Kräfte P und Q zerlegt in die zwei Componenten p und $\mathfrak{S}$, beziehungsweise q und S_1, so beanspruchen die Kräfte p und q die Arme des Kunstkreuzes auf ihre Zerknickungsfähigkeit und die einander entgegengesetzt wirkenden Componenten S und S_1 die Zugstange auf ihre Zugfestigkeit. Da die Richtungen der Kräfte p und q senkrecht sind zu den Richtungen der Kräfte P und Q und die beiden Arme gleich lang sind, so folgt daraus die Gleichheit der Kräfte p, q, P und Q. Die Arme sind als lose Streben zu betrachten, die in ihren Endpunkten nach den Geraden CB und AB geführt werden; man hat daher die Formel zu gebrauchen: $P = \frac{\pi^2 JE}{n l^2}$.

Fig. 86.



Wählen wir den Doppel-T-Querschnitt für die Arme, so zeigt eine kleine Rechnung, dass das Trägheitsmoment desselben bei der horizontalen Lage des Mittelsteges, bezogen auf die Achse aa als Schwerachse, kleiner ist als das Trägheitsmoment desselben Querschnittes bei verticaler Lage des Mittelsteges, bezogen auf die Achse $a_1 a_1$ als Schwerachse. Denken wir uns die beiden Endflantschen des Querschnittes in horizontaler Richtung zusammengeschoben, so erhalten wir den kreuzförmigen Querschnitt, dessen Trägheitsmoment $J = \frac{B h_1^3 + b h^3}{12}$ ist; setzen wir $B = 2h$, $B + b = h_1$, $h_1 = \mu h$, so erhält man: $J = \frac{h^4 (2\mu^3 + \mu - 2)}{12}$, diesen Wert in obige Gleichung für P eingesetzt und h bestimmt, gibt:



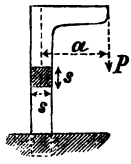
$$h = \sqrt{\frac{12 P n l^2}{\pi^2 E (2\mu^3 + \mu - 2)}},\ \mu = 5,\ h_1 = 5h,\ n = 25$$

und die übrigen Zahlenwerte eingesetzt, gibt $h = 15\,mm$, $h_1 = 75$, $b = 45\,mm$. Der Durchmesser d der Zugstange AC ergibt sich aus der Formel $S = f\mathfrak{S} = \frac{\pi d^2}{4}\mathfrak{S}$ und weil $S = P\sqrt{2}$ ist, so hat man auch $P\sqrt{2} = \frac{\pi d^2}{4}\mathfrak{S}$, woraus

$$d = \sqrt{\frac{4 P \sqrt{2}}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4 \,.\, 4000 \,.\, 1{\cdot}4142}{3{\cdot}14 \,.\, 6}} = 34{\cdot}7\,mm \text{ folgt.}$$

11) Ein prismatischer Balken aus Eichenholz von quadratischem Querschnitte ist in verticaler Lage mit seinem unteren Ende unwandelbar befestigt, mit seinem oberen Ende frei; mit letzterem ist ein horizontaler Arm von der Länge $a = 1\,m$ fest verbunden, an dessen Ende eine Last $P = 2140\,kg$ vertical nach abwärts wirkt, s. Fig. 86; es ist die Seite s des quadratischen Querschnittes des verticalen Balkens zu berechnen.

Fig. 86.



A. Da der Balken durch eine excentrisch wirkende Drucklast beansprucht wird, so ist die hierher gehörige Formel $P = \frac{\mathfrak{S} f J}{J + a c f}$ anzuwenden; hierin ist J das kleinere der beiden äquatorialen Trägheitsmomente, $J = \frac{s^4}{12}$, den Querschnitt des Balkens $f = s^2$, $c = \frac{s}{2}$ eingesetzt, erhält man eine Gleichung, welche nach der Unbekannten s geordnet, die Gleichung $s^3 - \frac{Ps}{\mathfrak{S}} = \frac{6aP}{\mathfrak{S}}$ gibt; diese Gleichung aufgelöst, gibt, wenn man $\mathfrak{S} = 0{\cdot}5$ und die übrigen Zahlenwerte einsetzt, abgerundet: $s = 300\,mm$. Die Querschnittsdimensionen des horizontalen Armes sind aus dem Biegungsmomente $P\left(a - \frac{s}{2}\right) = \mathfrak{S} Z$ zu berechnen.

12) Eine schmiedeiserne Hangestütze von rechteckigem Querschnitte hat eine excentrisch wirkende Zugbelastung $P = 1948\,kg$ zu tragen, die Excentricität beträgt $a = 120\,mm$; es sind die Querschnittsdimensionen b und h $(b > h)$ der Stütze zu berechnen (s. Fig. 87).

A. Setzt man in die hier anzuwendende Formel

$$P = \frac{\mathfrak{S} f J}{J + a c f},\quad f = bh,\quad c = \frac{h}{2},\quad J = \frac{bh^3}{12},\quad \frac{h}{b} = \frac{1}{2},\quad \mathfrak{S} = 6,$$

sowie die übrigen Zahlenwerte ein und bestimmt die Unbekannte b, so erhält man $b = 100\,mm$; also $h = 50$.

Fig. 87.

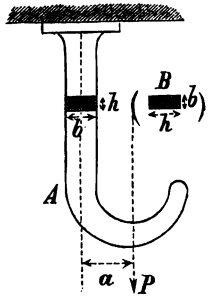
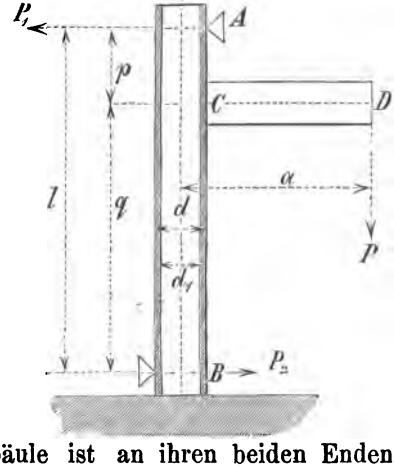


Fig. 88.



13) Eine hohle gusseiserne Säule ist an ihren beiden Enden, oben und unten seitlich gestützt (wie dies beispielsweise bei einer

Krahnsäule vorkommt, s. Fig. 88); mit ihrem unteren Ende steht sie flach auf dem Boden auf. Fest mit der Säule verbunden ist der horizontale Arm CD, an welchem die Last $P = 5314\,kg$ vertical nach abwärts wirkt und daher die Säule excentrisch auf ihre Druckfestigkeit beansprucht. Es ist der äußere und innere Durchmesser d und d_1 der Säule zu bestimmen, wenn die Excentricität $a = 1000\,mm$ und der Befestigungspunkt C des horizontalen Armes an der Säule so gelegen ist, dass $\frac{BC}{AB} = \frac{q}{l} = 0{\cdot}8$ ist.

A. Nach der Festigkeitstheorie des excentrischen Druckes ist allgemein die im gedrückten Stabe herrschende größte Druckfaserspannung gleich der Summe zweier Spannungen $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$, erstere herrührend von der Kraft P, letztere von einem Biegungsmomente M, und zwar ist $\mathfrak{S}_1 = \frac{P}{f}$, $\mathfrak{S}_2 = \frac{Mc}{J}$, daher $\mathfrak{S} = \frac{P}{f} = \frac{Mc}{J}$, in welcher Gleichung M das Maximalbiegungsmoment, P, c, f die schon in Nummer 11 dieses Abschnittes angegebenen Bedeutungen haben. Bei den Punkten A und B ist das Moment gleich Null, im Punkte C wirkt das Moment $M = \frac{Paq}{l}$, denn: Unmittelbar oberhalb C wirkt das Moment $M_1 = P_1 p$ und unmittelbar unterhalb C das Moment $M_2 = M_1 - Pa$ (P_1 = Widerstandskraft bei A). Für's Gleichgewicht ist aber $P_1 l = Pa$, daher $P_1 = \frac{Pa}{l}$ und $M_2 = M_1 - Pa = \frac{Pap}{l} - Pa$, oder, da $l - p = q$ ist, hat man auch: $M_2 = -\frac{Paq}{l}$; da aber das Vorzeichen des Moments auf die Querschnittsberechnung keinen Einfluss hat, so kann man auch schreiben: $M_2 = \frac{Paq}{l}$, welches auch das Maximalbiegungsmoment ist, was aus einer Vergleichung von M_1 und M_2 hervorgeht. Den Index von M_2 weggelassen, den Wert dieses Momentes in die Gleichung für $\mathfrak{S}$ eingesetzt, gibt:

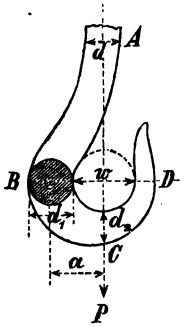
$\mathfrak{S} = \frac{Paq}{l} \cdot \frac{c}{J} + \frac{P}{f}$, setzen wir $\frac{q}{l} = \alpha$, $c = \frac{d}{2}$, $J = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)$, $f = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$, $d_1 = \alpha_1 d$ und reducieren, so erhalten wir, wenn wir P bestimmen, $P = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3(1-\alpha_1^4)}{32a\alpha + 4d(1+\alpha_1^2)}$, aus dieser Gleichung d bestimmt, gibt, wenn man die Zahlenwerte, sowie $\mathfrak{S} = 5$, ferner $\alpha_1 = \alpha = 0{\cdot}8$ einsetzt, abgerundet: $d = 250\,mm$, $d_1 = 200\,mm$.

14) Es sind die Querschnittsdimensionen eines schmiedeisernen Kettenhakens von $P = 5000\,kg$ Tragkraft zu berechnen, wenn der Querschnitt des Hakens an allen Stelle eine Kreisfläche ist.

A. Die bei einem Haken zu berechnenden wichtigsten Querschnittsdimensionen sind an den Stellen bei A, B und C (s. Fig. 89). Die Durchmesser an diesen drei Stellen seien d, d_1 und d_2, die Weite w des Hakens sei (vorläufig) nach einem Kreise vom Durchmesser $w = d_1$ gekrümmt. Der Theil des Hakens bei A ist gewöhnlich eine Schraube; der Kerndurchmesser d' derselben ist $d' = 0{\cdot}7\sqrt{P} = 0{\cdot}7\sqrt{5000} = 49{\cdot}5\,mm$; hiermit wird der äußere Durchmesser des Schrauben-

bolzens $d = 56{\cdot}4\,mm$. Der Querschnitt bei B hat eine excentrische Zugbelastung auszuhalten; die Excentricität ist $a = d_1$; setzt man daher in die für den vorliegenden Fall geltende Formel

Fig. 89.



$P = \frac{\mathfrak{S} f J}{J + acf}$, für f, J, a und c die Werte:

$$f = \frac{\pi d_1^2}{4},\ a = d_1,\ J = \frac{\pi d_1^4}{64},\ c = \frac{d_1}{2}$$

ein, so erhält man eine Gleichung, welche, nach der Unbekannten d_1 aufgelöst, gibt: $d_1 = 3{\cdot}385\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}}$, mit $\mathfrak{S} = 6$ und $P = 5000$ erhält man $d_1 = 97{\cdot}69\,mm$.

Gewöhnlich aber wird die Hakenweite $w = 1{\cdot}22\,d_1$ bis $1{\cdot}25\,d_1$ genommen, man kann daher für den ersteren Fall setzen: $a = \frac{d_1 + w}{2} = 1{\cdot}1125\,d_1$, diesen Wert von a in die Gleichung für die Tragkraft P eingesetzt und neuerdings d_1 bestimmt, gibt $d_1 = 3{\cdot}55\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}}$, die Zahlenwerte wie oben eingesetzt: $d_1 = 102{\cdot}4\,mm$. Im Querschnitte bei C wirkt die Kraft als Schubkraft. Nach der Theorie der Schubfestigkeit ist die größte Tangentialspannung im Querschnitte bei C

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{P}{f}\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{7\alpha^4}{16}\right),\ \text{wobei}\ \alpha = \frac{1}{\frac{w}{d_2} + 1}\ \text{und}\ f = \frac{\pi d_2^2}{4}$$

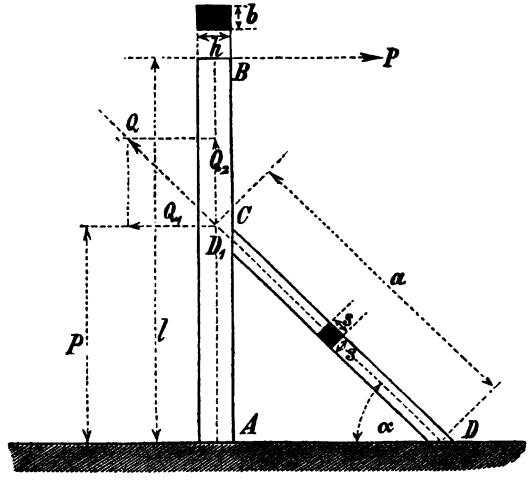
ist. Die Summe der Glieder in der Klammer ist, wie man auch das Verhältnis $\frac{w}{d_2}$ wählen mag, immer nur wenig größer als 1; zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir diese Summe $= 1{\cdot}2$, hiermit erhält man $\mathfrak{S}_1 = \frac{16P \cdot 1{\cdot}2}{3\pi d_2^2}$, diese Spannung muss aber der im Querschnitte bei C herrschenden größten Normalspannung, nämlich $\frac{3}{4}\mathfrak{S}$ bis $\frac{4}{5}\mathfrak{S}$, gleich sein; für $\mathfrak{S}_1 = \frac{3}{4}\mathfrak{S}$ erhält man $\frac{3}{4}\mathfrak{S} = \frac{6{\cdot}4P}{\pi d_2^2}$, woraus $d_2 = 1{\cdot}65\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}} = 1{\cdot}65\sqrt{\frac{5000}{6}} = 47{\cdot}62\,mm$ folgt.

Mit $\mathfrak{S}_1 = \frac{4}{5}\mathfrak{S}$ erhält man $d_2' = 1{\cdot}703\sqrt{\frac{5000}{6}} = 49{\cdot}14$. Die Beziehung $\mathfrak{S}_1 = \frac{4}{5}\mathfrak{S}$ ist gewöhnlich die allgemein gebrauchte. Diese Dimension d_2 wird gewöhnlich wegen des gewünschten, allmählichen Überganges des Querschnittes bei B in den bei C um etwas vergrößert, so dass das Hakenprofil bei B und C durch eine Kreislinie begrenzt wird.

15) Ein prismatischer Balken aus Eichenholz von rechteckigem Querschnitte und der Länge $l = 5\,m$ ist mit dem einen Ende in verticaler Lage bei A unwandelbar befestigt, am anderen Ende bei B wird der Balken durch die horizontal wirkende Kraft $P = 2000\,kg$ angegriffen und durch die Strebe CD in verticaler Lage erhalten

(s. Fig. 90). Man fragt: 1. Welche Länge a muss die Strebe erhalten, wenn ihr Querschnitt ein Quadrat von der Seite $s = 150\,mm$ ist? 2. Welche Querschnittsdimensionen b und h erhält der Balken AB?

Fig. 90.



A. Die Strebe CD denken wir uns durch eine Kraft Q ersetzt, in der Richtung der Mittellinie DD_1 wirkend; diese Kraft Q zerlegen wir in die zwei aufeinander senkrecht stehenden Componenten Q_1 und Q_2. Die Kräfte P und Q_1 haben in Bezug auf den Punkt A ein entgegengesetztes Drehungsbestreben, so dass die Gleichgewichtsbedingung stattfindet: $Q_1 p = Pl$, es ist aber $Q_1 = Q \cos \alpha$, $p = a \sin \alpha$ (wobei der Winkel α vorläufig als bekannt anzusehen ist), daher $Q = \frac{2Pl}{a \sin 2\alpha}$. Die Kraft Q nimmt die rückwirkende Festigkeit der Strebe in Anspruch, die Kraft Q wird umso kleiner, je größer $\sin 2\alpha$ wird, das Maximum von $\sin 2\alpha$ ist aber $\sin 2\alpha = 1$, daher $\sphericalangle \alpha = 45^0$; wir stellen daher die Strebe unter diesem Winkel gegen den Balken geneigt, somit ist $Q = \frac{2Pl}{a}$. Die Strebe ist als eine auf ihre Zerknickungsfestigkeit beanspruchte Säule zu betrachten, die an ihren Endpunkten lose aufsteht und in der ursprünglichen Stabachse gerade geführt ist, daher gilt die Gleichung $Q = \frac{\pi^2 JE}{na^2}$.

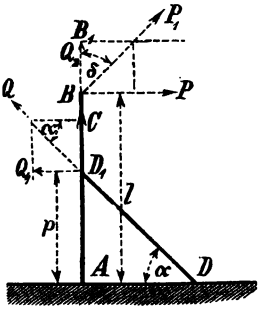
Setzen wir der bequemen Rechnung wegen $n = \pi^2$, so hat man $Q = \frac{2Pl}{a} = \frac{JE}{a^2}$, für J den Wert $J = \frac{s^4}{12}$ eingesetzt und die Unbekannte a bestimmt, so erhält man: $a = \frac{s^4 E}{24\,Pl} = \frac{(150)^4 \,.\, 1200}{24 \,.\, 2000 \,.\, 5000} = 2531\,mm$. Der Balkentheil BC wird durch die Kraft P auf Biegung und durch die Kraft Q_2 auf Zug, also auf seine zusammengesetzte Festigkeit beansprucht. Wenn man vorläufig Q_2 unberücksichtigt lässt und die

Dimensionen b und h des rechteckigen Balkenquerschnittes aus der für die Biegungsfestigkeit geltenden Formel $P(l-p) = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$ mit $b = \frac{5h}{7}$ berechnet, so findet man: $h = \sqrt[3]{\frac{42\,P(l-p)}{5\,\mathfrak{S}}}$, die Werte

$$p = a \sin \alpha = 2531 \,.\, \sin 45^0 = 1789{\cdot}4 \backsim 1790, \quad \mathfrak{S} = 0{\cdot}8$$

und die übrigen Zahlenwerte eingesetzt, erhält man $h = 406{\cdot}8\,mm$, somit $b = 290{\cdot}5\,mm$. Will man die Säule AB mit geringeren Querschnittsdimensionen erhalten, ohne die Festigkeit des Ganzen zu schwächen, so muss man die Länge der Strebe größer nehmen, also auch die Querschnittsdimensionen derselben größer machen, wie dies auch aus der obigen Gleichung für a hervorgeht. Mit $s = 170\,mm$ findet man $a = 4176\,mm$, $p = 4176 \,.\, \sin 45^0$, oder $p = 2952{\cdot}4\,mm$, hiermit erhält man aus der obigen Gleichung für h, wenn man die Zahlenwerte einsetzt, $h = 348{\cdot}5\,mm$ und $b = \frac{5}{7} \,.\, 348{\cdot}5 = 249\,mm$. Berücksichtigt man aber die Componente Q_2 und berechnet also den Balken AB auf seine zusammengesetzte Festigkeit, so hat man für diesen Fall die Formel $P_1 = \frac{SfJ}{J \cos\delta + f l_1 c \sin\delta}$, hierin bedeuten P_1 die Resultierende der Kräfte P und Q_2, δ den Winkel, den diese Resultierende mit der Verticalen AB einschließt (s. Fig. 91), f den Querschnitt des Balkens, $l_1 = BD = l - p$. Es ist hier

Fig. 91.



$P_1 = \sqrt{P^2 + Q_2^2}$, $Q_2 = Q \sin \alpha = \frac{2Pl}{a} \,.\, \sin\alpha$, oder die Zahlenwerte eingesetzt: $Q_2 = \frac{2 \,.\, 2000 \,.\, 5000}{4176} \,.\, 0{\cdot}707 = 3386\,kg$, hiermit wird

$$P_1 = \sqrt{(3386)^2 + (2000)^2} = 3932{\cdot}5\,kg,$$

$$\cos\delta = \frac{Q_2}{P} = 0{\cdot}861, \quad \sin\delta = \frac{P}{P_1} = 0{\cdot}508;$$

in obige Festigkeitsgleichung für P_1 die Werte

$$f = bh, \quad c = \frac{h}{2}, \quad J = \frac{bh^3}{12}, \quad b = \frac{5h}{7}$$

und die übrigen Zahlenwerte eingesetzt, erhält man eine cubische Gleichung, die nach der Unbekannten h aufgelöst, abgerundet gibt: $h = 355\,mm$, hiermit wird $b = 253{\cdot}5\,mm$. Will man die cubische Gleichung umgehen, so nehme man in der Gleichung

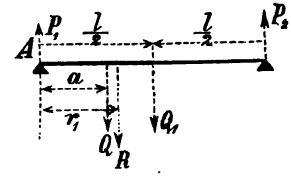
$$f = bh = \frac{P_1 \cos\delta}{\mathfrak{S}} + \frac{6\,l_1 P_1 \sin\delta}{\mathfrak{S} h}$$

für b probeweise einen beliebigen, passenden Zahlenwert an und erhält dann eine quadratische Gleichung nach der Unbekannten h. Ist jedoch die Strecke p gegeben und man fragt, für welchen Winkel α wird die Querschnittsdimension der Strebe $D_1 D$ am schwächsten, so

findet man aus den Gleichungen „$p \,.\, Q \cos \alpha = Pl$ (Gleichgewichtsgleichung), $Q = \frac{EJ}{a^2}$ und $a = \frac{p}{\sin \alpha}$, $J = \frac{Plp}{E \sin^3 \alpha \cos \alpha} = \frac{s^4}{12}$; je kleiner J wird, desto kleiner wird die Quadratseite s, also desto schwächer die Strebe, J wird am kleinsten, wenn der Nenner $E \sin^2 \alpha \cos \alpha$, oder weil E constant ist, $\sin^2 \alpha \cos \alpha$ ein Maximum wird, dieses Product wird aber, wie die Untersuchung zeigt, ein Maximum, wenn $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, das heißt $\sphericalangle \alpha = 54{\cdot}75^0$ wird; angenommen, es sei p, wie oben ausgerechnet, $p = 2952{\cdot}4\,mm$, dann ist $a = \frac{p}{\sin \alpha} = \frac{2952{\cdot}4}{\sin 54{\cdot}75^0} = 3600$, hiermit erhält man, wenn man obige Gleichung $\frac{s^4}{12} = \frac{Plp}{E \sin^3 \alpha \cos \alpha}$ nach der Unbekannten s auflöst und die Zahlenwerte einsetzt, $s = \sqrt[4]{\frac{12 \,.\, 2000 \,.\, 5000 \,.\, 2952{\cdot}4}{1200 \,.\, (0{\cdot}8166)^2 \,.\, 0{\cdot}57736}} = 166\,mm.$

16) Eine schmiedeiserne Schwungradwelle von der Länge $l = 2\,m$ zwischen den Unterstützungspunkten trägt in der Entfernung $a = 0{\cdot}6\,m$ von dem einen Unterstützungspunkte ein Schwungrad im Gewichte von $Q = 2600\,kg$ und überträgt 30 Pferdekräfte bei 500 Umdrehungen pro Minute. Es ist der Durchmesser d der Welle unter Berücksichtigung der Biegungsbelastung Q, sowie des Eigengewichtes der Welle zu berechnen; der mittlere Halbmesser des Schwungringes sei $r = 1{\cdot}5\,m$, das Gewicht des letzteren werde mit $Q_2 = 2000\,kg$ angenommen.

Fig. 92.



A. Um vorläufig zu einem ungefähren Werte des Wellendurchmessers wegen der Gewichtsberechnung der Welle zu gelangen, lassen wir die Last Q und das Eigengewicht der Welle vorläufig unberücksichtigt und berechnen den Durchmesser der Welle nur aus dem Torsionsmoment. Nach der in Beispiel 4, der Aufgaben über Torsionsfestigkeit entwickelten Formel $d = 120 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}$ erhält man, wenn man die Zahlenwerte einsetzt und d ausrechnet: $d = 105{\cdot}6\,mm$. Da aber die Welle wegen der Last Q jedenfalls stärker ausfallen wird, so nehmen wir behufs Gewichtsberechnung der Welle $d = 120\,mm$ an; hiermit erhält man das Gewicht der Welle

$$Q_1 = \frac{l d^2 \pi \gamma}{4} = \frac{20 \,.\, (1{\cdot}2)^2 \,.\, 3{\cdot}14 \,.\, 7{\cdot}75}{4} = 176\,kg.$$

Zur Berechnung des Maximalbiegungsmomentes M_b der Welle berechnen wir zunächst die Entfernung r_1 des Angriffspunktes der Resultierenden R der beiden Kräfte Q und Q_1 von dem Unterstützungspunkte A (s. Fig. 92). Aus der Momentengleichung $R r_1 = Q a + \frac{Q_1 l}{2}$ erhält man, wenn man diese Gleichung nach der Unbekannten r_1 auflöst: $r_1 = \frac{2Qa + Q_1 l}{2(Q + Q_1)} = \frac{2 \,.\, 2600 \,.\, 0{\cdot}6 + 176 \,.\, 2}{2(2600 + 176)} = 0{\cdot}625\,m$; der Auflagerdruck P_1 im Punkte A ist:

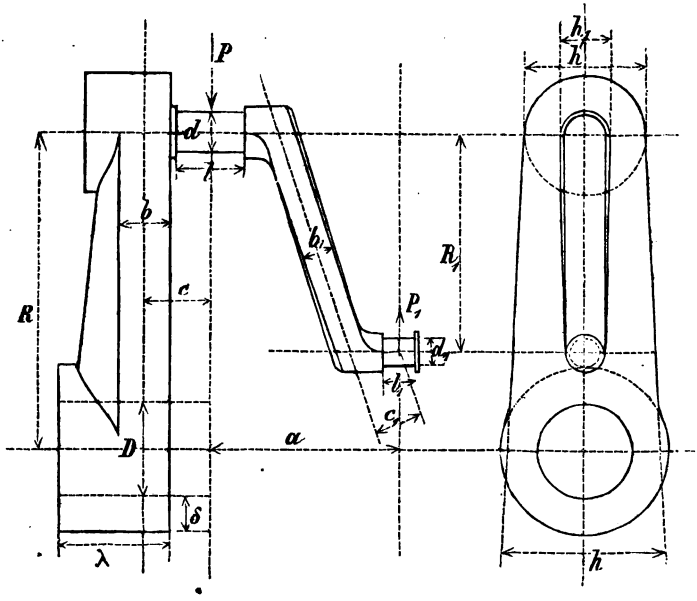
$$P_1 = \frac{R(l-r_1)}{l} = \frac{2776\,(2000-625)}{2000} = 1908{\cdot}5 \backsim 1909\,kg,$$

somit $M_b = P_1 r_1 = 1909 \,.\, 625 = 1193125$; das Torsionsmoment ist: $M_d = \frac{716200\,N}{u} = \frac{716200\,.\,30}{50} = 429.720$, die Welle wird auf Biegung und Torsion zugleich beansprucht, daher die größte zulässige Faserspannung $\mathfrak{S} = \frac{c}{J}\left(\frac{3}{8}M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2}\right)$, hieraus ist das ideelle biegende Moment $\frac{\mathfrak{S}J}{c} = M_{b(i)} = \frac{3}{8}M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2} = \frac{\pi}{32}d^3\mathfrak{S}$, diese Gleichung nach der Unbekannten d aufgelöst, erhält man mit $\mathfrak{S} = 6$, $d = 127\,mm$; das Gewicht der Welle bei diesem Durchmesser ergibt sich zwar jetzt mit $G_1 = 196\,kg$ gegen das früher berechnete Gewicht mit $176\,kg$, allein diese Differenz hat einen so geringen Einfluss auf den Wellendurchmesser, dass wir sie vernachlässigen können.

17) Es sind die wichtigsten Festigkeitsdimensionen einer gusseisernen Kurbel sammt dazugehöriger, schmiedeiserner Gegenkurbel aus folgenden Angaben zu berechnen:

Länge der Kurbel $R = 500\,mm$, Druck auf den Kurbelzapfen $P = 4000\,kg$, Wellendurchmesser $D = 150\,mm$, Druck auf

Fig. 93.



den Gegenkurbelzapfen $P_1 = 900\,kg$, Länge des Gegenkurbelhalbmessers $R_1 = 350\,mm$; die übrigen aus der Fig. 93 zu ersehenden Dimensionen sind: $c = 120\,mm$, $c_1 = 80\,mm$, $a = 300\,mm$.

A. *a)* Berechnung der Hauptkurbel.

1. Kurbelzapfen. Unter der Annahme, dass die Richtung der Kraft P_1 der der Kraft P entgegengesetzt ist (gewöhnlich der Fall), wirkt auf den Zapfen ein Biegungsmoment $M_b = P_1\left(a + \frac{l}{2}\right) - \frac{Pl}{2}$ und gleichzeitig ein Torsionsmoment $M_d = P_1 R$, es wird daher die zusammengesetzte Festigkeit des Zapfens beansprucht; die Länge l ergibt sich aus den Gleichungen $d = 1{\cdot}13\sqrt{P}$ und $\frac{l}{d} = 1{\cdot}5$, als ob der Zapfen nur durch den Druck P allein beansprucht wäre (die Abnützung des Zapfens ist ja nur von dem directen Druck P abhängig); man erhält rund $d = 72\,mm$ und $l = 108\,mm$. Hiermit hat man $M_b = 900\left(300 + \frac{108}{2}\right) - \frac{4000 \cdot 108}{2} = 102600$, $M_d = 900 \cdot 350 = 315000$, diese Werte in die Gleichung für das ideelle, biegende Moment $„M_{b\,(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2}$ eingesetzt, erhält man: $M_{b\,(i)} = 245530$; hiermit ergibt sich aus der Gleichung $M_{b\,(i)} = \frac{\pi \mathfrak{S} d^3}{32}$ mit $\mathfrak{S} = 6$, $d = 74{\cdot}7\,mm$. Wenn aber nur die Hauptkurbel allein wirkt, dann ist das biegende Moment $M_b = \frac{Pl}{2} = \frac{4000 \cdot 108}{2} = 216000$, hiermit findet man $M_{b\,(i)} = 324000$ und $d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 324000}{6 \cdot 3{\cdot}14}} = 81{\cdot}84\,mm$, welcher Wert beizubehalten ist.

2. Berechnung des Kurbelarmes der Hauptkurbel. Der Kurbelarm der Hauptkurbel wird durch das Biegungsmoment $M_b = PR$ und gleichzeitig durch das Torsionsmoment $M_d = Pc$ beansprucht; das von der Kraft P_1 auf den Arm ausgeübte Biegungs- und Drehmoment wäre zwar von $M_b + M_d$ abzuziehen, allein wenn die Hauptkurbel allein arbeitet, wäre der Arm wieder stärker beansprucht, daher ist dieser Abzug unzulässig. Das ideelle biegende Moment $M_{b\,(i)}$ kann als ein Product aus der Kraft P und einem unbekannten Halbmesser R'' angesehen werden; man findet dann aus der Gleichung $PR'' = M_{b\,(i)} = \frac{3}{8} PR + \frac{5}{8}\sqrt{(PR)^2 + (Pc)^2}$, $R'' = \frac{3}{8} R + \frac{5}{8}\sqrt{R^2 + c^2}$, oder Zahlenwerte eingesetzt: $R'' = 509\,mm$, der Arm wird also nur durch das Moment PR'' allein auf Biegung beansprucht; man erhält daher aus der Gleichung

$$PR'' = \frac{b h^2 \mathfrak{S}}{6}, \text{ mit } b = \frac{h}{3} \text{ und } \mathfrak{S} = 2{\cdot}5,\ h = \sqrt[3]{\frac{18\,PR''}{\mathfrak{S}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 4000 \cdot 109}{2{\cdot}5}} = 245\,mm, \text{ also rund } b = 82\,mm.$$

Wegen Abnahme des Momentes $M_{b\,(i)}$ von der Achse bis zum Zapfen verjüngt man auch die Breite h des Armes nach dem Zapfen hin, und zwar: Bei constanter Dicke b nimmt man die Armbreite h' an der Zapfenseite $h' = \frac{4}{5} h$.

3. Berechnung der Nabenwandstärke δ der Kurbel. Die Nabe wird durch dasselbe Moment M_d verdreht, welches die Welle beansprucht; es ist

$$d = \sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{PR}, \text{ also } d^3 = M = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16}\left(\frac{d_1^4 - d^4}{d_1}\right)$$

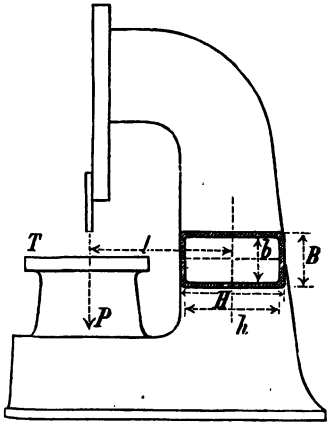
(d_1 = äußerer Durchmesser der Nabe); wir setzen $\mathfrak{S} = 1$ wegen der besonderen Anstrengung der Nabe durch das Eintreiben eines Keiles und erhalten dadurch angenähert $d_1 = 1{\cdot}8\,d$, oder weil $d_1 = d + 2\delta$ ist, so hat man auch $\delta = 0{\cdot}4\,d$; im vorliegenden Falle ist laut Figur d durch D ersetzt, daher $\delta = 0{\cdot}4\,D = 0{\cdot}4 \,.\, 150 = 60\,mm$; die Länge λ der Nabe nimmt man gewöhnlich $\lambda = D$ bis $\lambda = 1{\cdot}25\,D$.

b) Berechnung der Gegenkurbel.

Der Durchmesser d_1 des Gegenkurbelzapfens ergibt sich mit $d_1 = 1{\cdot}13\sqrt{P_1} = 1{\cdot}13\sqrt{900} = 34\,mm$, die Länge $l_1 = 1{\cdot}5\,d_1 = 1{\cdot}5 \,.\, 34 = 51\,mm$. Die Höhe h_1 des Armes ergibt sich daraus, dass die Seiten desselben tangential an den Anlauf des Hauptkurbelzapfens gerichtet sein sollen; man erhält hiernach $h_1 = 76\,mm$. Der Arm wird auf seine zusammengesetzte Festigkeit durch das Biegungsmoment $P_1 R_1$ und durch das Drehmoment $P_1 c_1$ beansprucht, er wird nach dem ideellen biegenden Moment $P_1 R'$ berechnet. Der ideelle Arm dieses Momentes ist $R' = \frac{3}{8} R_1 + \frac{5}{8}\sqrt{R_1^2 + c_1^2}$, die Zahlenwerte eingesetzt und ausgerechnet, gibt $R' = 356\,mm$; hiermit erhält man aus der Gleichung $P_1 R' = \frac{b_1 h_1^2 \mathfrak{S}}{6}$, $b_1 = \frac{6 P_1 R'}{h_1^2 \mathfrak{S}} = \frac{6.900.356}{(76)^2 . 6} = 55{\cdot}5\,mm$; die Höhe h_1 des Gegenkurbelarmes kann man ebenfalls nach dem Gegenkurbelzapfen hin auf $\frac{4}{5} h_1$ verjüngen.

18) Es ist der stärkst beanspruchte Querschnitt des gusseisernen, hohlen Gestelles einer Stoßmaschine zu berechnen, wenn der von dem Widerstande des Werkzeuges herrührende Druck $P = 4500\,kg$ beträgt (s. Fig. 94). Die Entfernung der Kraftrichtung von dem Schwerpunkte des zu berechnenden Querschnittes sei $l = 750\,mm$.

Fig. 94.



A. Die stärkste Beanspruchung des Gestelles findet ungefähr in der Höhe des Tisches **T** statt. Der Querschnitt des Gestelles sei an dieser Stelle ein hohles Rechteck. Wir nehmen die Dimensionen desselben vorläufig an wie folgt: $B = 270\,mm$, $H = 400\,mm$, $b = 210\,mm$, $h = 340\,mm$. Das Gestell ist infolge der excentrisch

wirkenden Kraft P auf seine zusammengesetzte Festigkeit beansprucht, daher ist die Tragkraft $P = \frac{\mathfrak{S} f J}{J + a c f}$, woraus $\mathfrak{S} = \frac{P}{f} + \frac{M}{Z}$ folgt $\left(\text{Querschnittsmodul } Z = \frac{J}{c}\right)$. Wir berechnen aus den gegebenen und angenommenen Daten den Wert $\frac{P}{f} + \frac{M}{Z}$ und erfahren dadurch den Wert von $\mathfrak{S}$; kommt dieser zu groß oder zu klein heraus, so nehmen wir andere Querschnittsdimensionen an. Es ist

$$Z = \frac{J}{c} = \frac{1}{12}\left\{\frac{270 \,.\, (400)^3 - 210 \,.\, (340)^3}{200}\right\} = 3760900,$$

der Flächeninhalt f des Querschnittes ist $f = BH - bh = 270 \,.\, 400 - 210 \,.\, 340 = 36600$. Das Maximalbiegungsmoment, welches das Gestell beansprucht, ist $M = Pl = 5400 \,.\, 750 = 3375000$, daher $\mathfrak{S} = \frac{3375000}{3760900} + \frac{4500}{36600} = 1{\cdot}02\,kg$, eine Beanspruchung, die offenbar eine genügende Sicherheit gegen Bruch gewährt.

19) Es ist für eine Lochmaschine eine schmiedeiserne Achse nach folgenden Angaben zu berechnen: Die Achse ist in den Punkten A und B (s. Fig. 95) gelagert, trägt im Punkte C eine Belastung $P_2 = 800\,kg$, herrührend von Rädern; im Punkte D hat die Achse an einem um $e = 40\,mm$ excentrisch gegen die Achse stehenden Zapfen einen aufwärts gerichteten Druck $P_4 = 2500\,kg$ auszuhalten; die Entfernung der Lagermittel ist $400\,mm$, die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft P_2 vom Punkte A ist $150\,mm$, die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft P_4 vom Punkte B ist $120\,mm$.

Fig. 95.

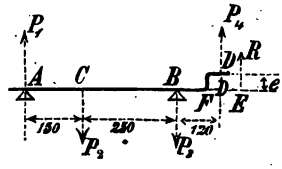
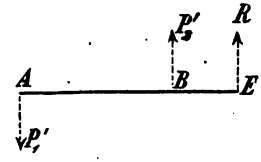


Fig. 96.



A. Die Kräfte P_2 und P_4 haben eine Resultierende $R = P_4 - P_2 = 2500 - 800 = 1700\,kg$. Die Kraft R zerlegt in die Componenten P_1' und P_3' (s. Fig. 96), angreifend in den Unterstützungspunkten A und B der Achse, welchen Kräften zur Herstellung des Gleichgewichtes die Unterstützungsdrücke P_1 und P_3 in A und B entgegenwirken.

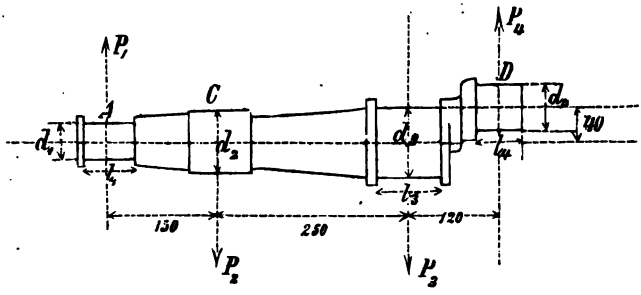
Man hat dann fürs Gleichgewicht die Gleichung:

$$400\,P_1 = 2500 \,.\, 120 + 800 \,.\, 250, \text{ woraus}$$

$P_1 = 1250\,kg$ und $P_3 = R + P_1 = 1700 + 1250 = 2950\,kg$ folgt. Im Punkte C wirkt das Biegungsmoment $M_b = 1250 \,.\, 150 = 187500$, vom Punkte C angefangen ist die Achse bis zum Punkte F auf Torsion beansprucht durch das Drehmoment $M_d = 2500 \,.\, 40 = 100000$, weil bei C die Kraft in die Achse eingeleitet und bei D wieder abgegeben wird; es findet also in C ein resultierendes,

ideelles, biegendes Moment statt: $M_{b(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$ und wegen $M_b > M_d$ ist angenähert: $M_{b(i)} = M_b + \frac{M_d}{4} = 212500$; im Punkte B ist das Biegungsmoment $M_b = 2500 \cdot 120 = 300000$ und das Drehmoment wie im Punkte C, nämlich 100000, daher das resultierende, ideelle, biegende Moment $M_{b(i)} = 300000 + \frac{100000}{4} = 325000$; hiernach bestimmen sich die Durchmesser der Achse wie folgt (s. Fig. 97):

Fig. 97.



Der Durchmesser d_1 des Zapfens in A wird gefunden aus der Gleichung $\frac{P_1 l_1}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_1^3}{32}$ mit $d_1 = 47\,mm$, hierbei ist $\mathfrak{S} = 4$, $\frac{l_1}{d_1} = 1{\cdot}4$; der Durchmesser d_2 des Achsenkopfes in C ist aus der Gleichung

$$M_{b(i)} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_2^3}{32},\ d_2 = 81\,mm;$$

der Durchmesser d_3 im Halslager findet sich aus der Gleichung $M'_{b(i)} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_3^3}{32}$ mit $d_3 = 93\,mm$ und $l_3 = d_3$; der Durchmesser d_4 des excentrischen Zapfens in D ist aus der Gleichung $\frac{P_4 l_4}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_4^3}{32}$, $d_4 = 56\,mm$, hierbei ist $\mathfrak{S} = 4$, $l_4 = d_4$.

20) Wie groß ist der Zugwiderstand Q, welcher vermittelst einer schmiedeisernen, flachgängigen Schraube in der Richtung ihrer Achse durch eine Kraft P überwunden werden kann, wenn diese Kraft an einem Hebelarm $R = 500\,mm$ wirkt. Der Halbmesser des Schraubenkernes ist $r = 50\,mm$; die Reibung in den Gewindegängen, sowie die durch die Kraft P hervorgebrachte Torsionswirkung auf die Schraube sind zu berücksichtigen. Man fragt ferner, wie groß ist die zur Überwindung des Widerstandes Q anzuwendende Kraft P?

A. Die Größe des zu überwindenden Widerstandes ist abhängig von der Querschnittsfläche des Schraubenkernes und von dem Drehmoment $M_d = PR$. Die Schraube ist auf ihre Zug- und Torsionsfestigkeit zu berechnen. Zur Bestimmung der beiden Unbekannten P und Q muss man zwei Gleichungen aufstellen, und zwar: die erste

ist eine Festigkeitsgleichung, die zweite ist eine auf die Schraube bezügliche Gleichgewichtsgleichung, welche die Beziehung zwischen P und Q mit Berücksichtigung der Reibung darstellt. Die Festigkeitsgleichung, welche die Zug- und Torsionsfestigkeit der Schraube berücksichtigt, ist:

1) . . . . . $\mathfrak{S} = \frac{Q}{\pi r^2}\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{Q^2 r^2 + 16 M^2}{Q^2 r^2}}\right)$,

die Gleichgewichtsgleichung lautet:

2) . . . . . $M = Q\varrho \cdot \frac{h + 2\varrho\pi f}{2\varrho\pi - fh}$,

worin ϱ den mittleren Halbmesser der Schraube $\varrho = \frac{r_1 + r}{2}$ (r_1 = äußerer Halbmesser der Schraube), h die Ganghöhe der Schraube,

$$h = \frac{2r_1}{5} = \frac{r}{2} = \frac{50}{2} = 25\,mm, \quad \text{somit } \varrho = \frac{9h}{4} = \frac{9 \cdot 25}{4} = 56{\cdot}25$$

und f den Reibungscoëfficienten $f = \frac{h}{2\varrho\pi} = \frac{25}{2 \cdot 56{\cdot}25 \cdot 3{\cdot}14} = 0{\cdot}0707$ bedeutet.

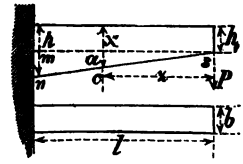
Aus den Gleichungen 1) und 2) findet man*), wenn man dieselben nach den Unbekannten P und Q auflöst und die entsprechenden Zahlenwerte einsetzt:

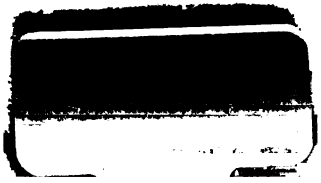
$$Q = 21109\,kg, \quad P = \frac{M}{R} = \frac{167981{\cdot}2}{500} = 335{\cdot}8\,kg.$$

*) Die nähere und ausführliche mathematische Behandlung dieser Aufgabe siehe: Graf, „Festigkeitslehre“. Spielhagen und Schurich, Wien, S. 471.

Druck von Gottlieb Gistel & Comp. in Wien.

Druckfehler-Verzeichnis.

Seite	Zeile	
24	4	von oben soll es statt $1{\cdot}25\,b$ heißen: $1{\cdot}25\,d$
24	—	Die Figuren Nr. 18 und 19 sind miteinander zu vertauschen
30	17	von unten soll es statt $\frac{1}{0{\cdot}094}$ heißen: $\frac{1}{0{\cdot}904}$
45	—	An Stelle der Figur 42 soll die Figur 76 auf Seite 72 und umgekehrt stehen.
54	13	von unten soll anstatt .... angegeben sind .... stehen: mit $B = 97$, $H = 232$, $b = 77$, $h = 206\,mm$ angegeben sind.
64	6	„ oben „ „ „Länge" stehen: Lage
65	16	„ „ „ „ $268\,V^-$ stehen: $268\,\overset{3}{V}{}^-$
70	—	An Stelle der Figur 74 soll folgende stehen: 
72	—	Soll an Stelle der Figur 76 die Figur 42 auf Seite 45 stehen
78	9	von unten soll es statt 5000 heißen: 500
82	9	„ oben „ „ „ $\frac{d_1^4 - d^4}{d}$ heißen: $\frac{d_1^4 - d^4}{d_1}$ (äußerer Durchmesser des Muffes $= d_1$)
85	6	„ „ „ „ „ V^- heißen: $\overset{3}{V}{}^-$
85	19	„ unten „ „ „ $\frac{\pi^2 J E}{4 l^2}$ heißen: $\frac{\pi^2 J E}{4 l^2 n}$
86	6	„ „ „ „ „ $b h^3$ heißen: $b B^3$
90	13	„ oben „ „ „ $\frac{P}{f} = \frac{M_c}{J}$ heißen: $\frac{P}{f} + \frac{M_c}{J}$
94	15	„ „ „ „ „ 500 heißen: 50
96	5	„ „ „ „ „ $P_1 R$ „ $P_1 R_1$
96	5	„ unten „ „ „ 109 „ 509.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

YC 66857